たこ焼きの半径上限に関して

入江 一帆 * , 橋本 幸士 †

2021 年 7 月

概 要

文献 [1] において, たこ焼きの形状に関する予想が二つ提案されている. 一つは球形の場合の半径上限予想, そしてもう一つは形状を扁平にした場合に体積無限大極限が取れるという予想である. 本論文では, これらの予想を数学的に定式化し, また 4 種類の形状を採択してたこ焼き生成による実験検証を行う. 実験の結果, これらの予想と矛盾ない結果が得られた.

1 導入

たこ焼きは日本の大阪で育まれた非常にポピュラーな食文化であるが, 店頭で売られているたこ焼きはおおよそ半径が 15[mm] から 20[mm] の球形となっていることが観察される. この理由について, 本論文では理論の面と実験の面から考察する.

文献 [1] において, たこ焼きがその程度の大きさの球形であるのは, 表面がカリッとしている一方で内部がトロッとしている, というたこ焼き粘性の半径座標依存性に原因があると推察されている. この半径依存性を実現するためのたこ焼きの形状として, 構造安定性の見地から, 球形の場合は半径に上限がありうるという予想がなされた [1]. また, 構造を保ちながらたこ焼きを巨大化する方法としてたこ焼きを扁平にすればよいという予想が提示されている [1][1]. 本論文では, これらの予想を数学的に定式化し実験的に検証する.

本論文の内容提示は以下の順である. まず第 2 章において, たこ焼きの形状を決定するたこ焼き関数 $h(r)$ を導入し, たこ焼きの形状最適化問題を数学的に定式化する. 次に第 3 章において, さまざまなたこ焼き関数で具体的にたこ焼き生成の実験を行い, 構造安定性の視認の結果を報告する. 第 4 章に我々の結論と若干の議論をまとめる.

2 たこ焼き関数の最適化

3 次元ユークリッド空間を考える. 直交座標系として (x, y, z) を導入し, たこ焼きが z 軸に関して回転対称かつ (x, y) 面に関してパリティ対称であると仮定する[2]. このとき, たこ焼きの表面は (x, y) 面内に導入される 2 次元球座標の動径 r の関数 $h(r)$ でユニークに定まり, その体積 V と表面積 A は

$$V \equiv \int_0^\infty dr\, 4\pi r h(r)\,, \quad A \equiv \int_0^\infty dr\, 4\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dh(r)}{dr}\right)^2} \tag{1}$$

* ラムダ技術部, https://ラムダ.com

† 京都大学大学院理学研究科, koji@scphys.kyoto-u.ac.jp

[1] これらの予想は古く [2] に与えられている.

[2] すなわち, たこ焼きの表面は $U(1) \times Z_2$ の対称性を持つと仮定する.

と与えられる．この $h(r)$ は実質的には, たこ焼きを (x, y) 面で切って切断面を下にして水平に置いたときのたこ焼きの高さを表す関数である．物理的なたこ焼きの実在を仮定するため, $h(r)$ は r の連続実関数とし $h(r) \geq 0$ とする．ここでたこ焼きの表面積 A は有限である, すなわち $A < \infty$ を仮定するため, ある $R(> 0)$ が存在し $h(r)$ は $r > R$ で 0 となる．これはすなわちたこ焼きの最大半径を R とおくことと等価である．したがって, 式 (1) に現れる積分の上限は実質的には R となる．

表面積 A を固定したまま体積 V を最大化するためには次の作用 S を最小化すれば良い．

$$S = -V + \lambda(A - A_0)\,. \tag{2}$$

ここで λ はラムダ技術部ではなくラグランジュの未定乗数であり, 正の実数 $A_0(> 0)$ は固定する表面積の値である[3]．λ を積分することで表面積が固定されるが, 力学変数 λ を導入せずとも, 正の非常に大きな定数 M を導入して

$$S' = -V + M(A - A_0)^2 \tag{3}$$

を最小化することでも等価な解を得ることができる．後者は数値計算に有用である．

この問題の解は $h(r) = \sqrt{A_0/(4\pi) - r^2}$ すなわち 2 次元球面 S^2 であることが知られている．一方本論文で論ずるたこ焼き問題の場合, 上記の最小化問題の追加条件として, 厚さがある正の定数 $2h_0$ を超えてはならない, という制約をおく (これにより, たこ焼きの形状が安定化されると仮定する)．この新たな制約を「たこ焼き制約」と定義する．厚さは Z_2 対称な場合に定義でき, $2h(r)$ であるから, たこ焼き制約を満たすためには

$$h(r) \leq h_0 \tag{4}$$

を要請せねばならない．この制約を課すために作用を変形して

$$S' = -V + M(A - A_0)^2 + M' \int dr\, \theta(h(r) - h_0) \tag{5}$$

のように第 3 項を追加する．ここで $\theta(x)$ はステップ関数であり, M' は大きな正の実数である．またたこ焼き制約が意味を成すために, $\sqrt{A_0/(4\pi)} > h_0$ と仮定する．

数値計算上ではステップ関数を滑らかなシグモイド関数で置き換え, また最適化問題が数値収束するように M や M' の大きさをチューンする必要がある．また, 関数 $h(r)$ を N 次多項式で近似するのが望ましい．

$$f(r) = \sum_{n=0}^{N} c_n r^n \tag{6}$$

$N \to \infty$ 極限で任意の関数が近似できるが, 数値最適化のためには N を $\mathcal{O}(10)$ 程度と取る必要がある．

文献 [1] で与えられた予想は, 上記の作用最小化問題に解 $h(r)$ が存在し, 体積 V の無限大極限が存在し, そのとき $h(r)$ は扁平となる, というものである．扁平性は次のように定義する[4]．たこ焼き関数 $h(r)$ が扁平であるとは, $\mathcal{O}(\sqrt{A_0})$ の実数 $R'(< \sqrt{A_0})$ が存在して全ての $r < R'$ に対して $h(r)$ が

$$h'(r) \ll \frac{h_0}{\sqrt{A_0}} \tag{7}$$

を満たすことを言う．すると文献 [1] における予想は次のように定式化できる：

たこ焼き形状予想

作用関数 (5) を最小にする解 $h(r)$ がただ一つ存在し, $\sqrt{A_0/(4\pi)} \gg h_0$ のとき $h(r)$ が扁平性 (7) を満たす．

---

[3] なおこの問題は, 2 次元空間では Queen Dido's problem と呼ばれ, 対称性を仮定せずとも解くことができる．力学変数として $x(t), y(t), \lambda$ を導入し, ラグランジアンとして $L = \frac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$ を用い, 積分する．初項では, 2 次元積分であったものを 1 次元積分に直すグリーンの定理を用いている．近年の発展までの歴史的背景については, [3] を参照のこと．

[4] まず R は関数 $h(r)$ から従うものであって, 問題に登場するパラメータではないため, 以下の扁平性の定義に用いることができない．そこで代替として $\sqrt{A_0}$ を用いる．

図 1: 上段左：例 a. の実験結果. 上段右：例 b. の実験結果. 下段左：例 b. において自重で崩壊している様子. 下段右：例 d. の実験結果.

3　実験

本章では, たこ焼き形状についての確認実験の結果を報告する. たこ焼きを焼くためにはたこ焼き器が必要であり, その穴の形状ですでに関数 $h(r)$ が決まってしまうため, いくつかの特定の $h(r)$ についてたこ焼きを焼き, その形状が安定するかどうかで適切な解であったかどうかを判定する. 実験で試される試行関数は次の通りである.

a. $h(r) \simeq \sqrt{r_0^2 - r^2}$, ここで $r_0 = 20.0[\mathrm{mm}]$

b. $h(r) \simeq \sqrt{r_0^2 - r^2}$, ここで $r_0 = 42.5[\mathrm{mm}]$

c. $h(r) \simeq \sqrt{r_0^2 - r^2}$, ここで $r_0 = 50.0[\mathrm{mm}]$

d. $h(r) \simeq h_0\theta(r_0 - r)$, ここで $h_0 \simeq 24 \pm 3[\mathrm{mm}]$, $r_0 \simeq 74[\mathrm{mm}]$

はじめの 3 例は 2 次元球面を成す例であり, 最後の例 d は扁平なたこ焼きである[5]. これらのたこ焼きには標準的なタコやネギなどを投入し, 摂氏 2×10^2 度で焼き上げた. 生成したたこ焼きを平らな台の上に置き, $\mathcal{O}(10)$ 秒の間に自重で形状がおよそ 10% 以上変形するかどうかを目視判定した. 結果は以下の表 3 のとおりである.

表 3 から分かる通り, 半径が比較的大きい b. や c. の例ではたこ焼きは変形し自重を保てない[6]. 一方で, 例 d. によると, 扁平なたこ焼きは, 厚さに比べて広がりが十分に大きい（$h_0 \ll r_0$）にも関わらずたこ焼きは変形せず, 自重を保っていることがわかる.

なお, 本実験の様子は YouTube にて公開している [4]. 実験の様子については, 図 1 を参照のこと.

[5] 例 a., 例 b., 例 c. に関してはパラメタ r_0 はたこ焼き生成器の穴のサイズの測定, 例 d. に関しては生成されたたこ焼きの実測値, 特に r_0 は 2 回の測定後の平均値.

[6] なお, 過度の加熱により半径が収縮する現象が観測されたため, 例 b. においては補足実験として, 加熱時間を大幅に長くしてたこ焼きの表面をより固くした例も実験した. この場合, 自重を保つことはできたが, たこ焼きの中が固化してしまい, たこ焼きとは呼べない化合物が生成した.

たこ焼きタイプ	形状の特質	結果	
a.	（球形, 半径 20.0mm）	非変形	
b.	（球形, 半径 42.5mm）	変形	（補足実験あり）
c.	（球形, 半径 50.0mm）	変形	
d.	（扁平, 厚さ 24mm）	非変形	

表 1: たこ焼き形状実験の結果

4 結論

たこ焼きの半径の上限に関する考察 [1] に基づき, 我々はその数学的な問題の定式化と, 形状上限に関する実験を行った. 数学的な定式化においては, たこ焼きの形状に $U(1) \times Z_2$ の対称性を課した場合に形状が実関数 $h(r)$ で定まることを示し, $h(r)$ のある種の積分で定義される作用関数の最小化問題としての定式化を行った. また, 形状上限の実験により, 球形の場合は半径が 20[mm] から 40[mm] の間に上限が存在しており, この上限を超えるとたこ焼きの形状が安定しなくなることが示された. また, 扁平なたこ焼きを用いた実験では, 厚さが 24[mm] であっても十分に広いたこ焼きで形状が安定することを発見した. これは, 文献 [1] で与えられた予想を実験的に確認するものである.

今後の課題について簡単に述べる. まず, 数学的に定式化されたたこ焼き上限問題には解析解が与えられておらず, 今後の数学における発展が待たれる. また, 本稿においては詳しく述べなかったが, 焼き上がったたこ焼きの内部の粘性の観察を行ったところ（図 2 を参照）, 例 b. や例 c. においては内部の粘性が非常に大きくなっていることが判明した. たこ焼きの定義として形状の安定性だけではなく内部の粘性, もしくは内部の粘性と表面の粘性の比, などを尺度にすることも十分考えられ, その定義に従ったたこ焼きの半径の上限を考察することが十分に意義があると考えられる. これらは将来の研究として, 読者に任せられる.

図 2: 例 b. の内部の粘性を視認する様子.

謝辞

本研究は集英社インターナショナル (株) のサポートのもとで行われた. 著者はここに謝意を表する.

参考文献

[1] 橋本幸士『物理学者のすごい思考法』（集英社インターナショナル，2021）

[2] 橋本幸士『D ブレーンとのたわむれ』 `https://d-brane.hatenadiary.org/entry/20140302/p1`

[3] Catherine Bandle, “Dido’s Problem and Its Impact on Modern Mathematics,” Notices of the American Mathematical Society 64 (09):980-984, October 2017. DOI:10.1090/noti1576

[4] ラムダ技術部 YouTube チャンネル `https://www.youtube.com/channel/UC8g17oXkRt8buwQL8GU-NSw`