

宇宙際 Teichmüller 理論入門

星 裕一郎 (京都大学 数理解析研究所)

2015 年 11 月

目次

0	序	3
1	円分物	4
2	フロベニオイドの円分剛性同型	6
3	宇宙際 Teichmüller 理論における遠アーベル幾何学	8
4	Diophantus 幾何学的結果へのリンクによるアプローチ	11
5	コアの対象	13
6	局所的単解対象のコア性	15
7	多輻的アルゴリズム	19
8	対数殻	21
9	対数リンク	25
10	軽微な不定性	28
11	数から関数へ	31
12	主定理の大雑把版	34
13	様々な被覆とテータ関数	36
14	単テータ環境	41
15	単テータ環境の剛性性質	43
16	テータ関数の多輻的表示	47

17	初期 Θ データ	50
18	カスプのラベル類	55
19	テータ関数に関わる大域的エタールの設定	57
20	加法的 Hodge 劇場	59
21	数体の復元に関わる大域的エタールの設定	63
22	大域的フロベニオイド	67
23	Θ Hodge 劇場	69
24	数体に関わる Kummer 理論	72
25	乗法的 Hodge 劇場	77
26	Hodge 劇場と対数リンク	78
27	まとめ	80

0 序

本稿は、題目のとおり、望月新一氏によって創始された宇宙際 Teichmüller 理論への入門的解説をその目標として書かれたものです。特に、“宇宙際 Teichmüller 理論において遠アーベル幾何学がどのような形で用いられるか”、“ある Diophantus 幾何学的帰結を得るために宇宙際 Teichmüller 理論ではどのような定理を証明するのか”、“宇宙際 Teichmüller 理論の主定理を得るために導入された概念である Hodge 劇場とはどのような概念なのか”などといった点が、本稿の内容の中心となっています。

本稿執筆の際に心掛けたこととして、以下の 2 点があります。(a) その段階その段階で直面する問題を明示的に述べて、そして、宇宙際 Teichmüller 理論におけるその問題の解決の方法を説明することで、(たとえ説明に多少の遠回りや重複や脱線が生じたとしても) 宇宙際 Teichmüller 理論で行われている様々な議論、及び、そこに登場する様々な概念が、“自然なもの”、“必要なもの”であることを、可能な限り明らかにするように努めました。(b) 宇宙際 Teichmüller 理論にはたくさんの“新しい考え方”が登場します。それら(の少なくともいくつか)は決して難しいものではないのですが、その“新奇性”によって、そういった考え方に対する理解への努力が放棄される、という事態が発生しているのかもしれないと思います。そこで、たとえ非常に初等的なものであっても、いくつもの例を挙げることで、そのような新しい考え方の新奇性のみによる議論からの脱落を生じさせないように努めました。

また、本稿には、多少 — というより、無数の — “不正確な記述”が登場します。これは、もしも“正確な記述のみ”を用いて理論の説明を試みると、解説の方法が、少なくとも筆者の力では、原論文での元々の理論の説明の方法とあまり変わらないものになり、このような解説を行う意味がなくなってしまふ、という事情から生じています。理論が完成した後の段階の正確な記述のみによる原論文における理論の“説明”とは別の、その理論がどのような発想によって生じたものなのかを想像してそこからその理論が如何に自然なものであるかを論じる“説明”において、少なくとも筆者にとっては、その“不正確な記述”が必要でした。この点、どうかご容赦ください。

本稿の構成は、おおまかには以下のようになっています:

- §1 から §3: 宇宙際 Teichmüller 理論において遠アーベル幾何学がどのような形で用いられるか、という点についての説明.
- §4 から §12: ある Diophantus 幾何学的帰結を得るために、“何をすれば良いか”、“どのようなアプローチがあり得るか”、“そのアプローチの枠組みで何が出来るか”という点についての考察。特に、宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把な形の説明.
- §13 から §20: テータ関数に関わる局所理論やその大域化の説明、特に、加法的/幾何学的な対称性が重要な役割を果たす“加法的 Hodge 劇場”の構成の説明.
- §21 から §25: 数体の復元に関わる理論の説明、特に、乗法的/数論的な対称性が重要な役割を果たす“乗法的 Hodge 劇場”の構成の説明.
- §26: 最終的な Hodge 劇場の構成の説明.

既に述べたように、本稿には、説明のための不正確な記述が多数存在します。また、当然ですが、何か物事を説明する際、その説明の方法は一意的ではなく、そして、“最善なもの”というものも通常は存在しないと思

ます。本稿で行われている解説は、あくまで、“ある時点での筆者が選択した方法”による 1 つの解説に過ぎません。別の方が本稿のような解説を行えば、まったく別の方法による解説が得られるでしょう。あるいは、筆者が数年後に再びこの理論の解説を試みれば、また別の方法による解説が得られるかもしれません。宇宙際 Teichmüller 理論の本格的な理解を目指すならば、どうしても原論文の精読が不可欠である、という当たり前の事実を、ここに指摘します。

謝辞 本稿執筆時に限らずこれまで宇宙際 Teichmüller 理論に関する無数の議論にお付き合いくださった望月新一先生に感謝申し上げます。また、2013 年度に合計 100 時間以上にも及ぶセミナーで宇宙際 Teichmüller 理論について説明してくださった山下剛さんに、そして、そのセミナーを共に乗り切りそこでの数々の議論にお付き合いくださった玉川安騎男先生、松本眞先生に、感謝申し上げます。

本稿の §1 から §3 は 2015 年 3 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会“宇宙際タイヒミュラー理論の検証と更なる発展”での筆者による講演“数体の単遠アーベル的復元”の内容の一部をまとめて更に説明を付け加えたものであり、そして、本稿の §1 から §8 の内容をもとに 2015 年 6 月に九州大学の数論幾何学セミナーにおいて“宇宙際 Teichmüller 理論入門”という題目の講演を行いました。これら講演の機会を与えてくださった望月新一先生、田口雄一郎先生にお礼申し上げます。

この原稿の執筆が、JSPS KAKENHI Grant Number 15K04780 の支援を受けていることを、ここに明記します。

1 円分物

まず最初に、§1 から §3 では、宇宙際 Teichmüller 理論において、遠アーベル幾何学がどのような形で用いられるか、という点についての説明を行おうと思います。結論を簡単に述べてしまいますと、宇宙際 Teichmüller 理論において、遠アーベル幾何学は、“エタールの対象の結び付きによる、対応する対象の間の関連付け”のために、より大雑把には、“エタールの対象の結び付きによる対象の輸送”のために用いられると言えます。この §1 では、その対象の輸送の遂行の際に重要な役割を果たす円分物 (cyclotome) という概念についての解説を行います。

円分物とは何でしょうか。それは Tate 捻り “ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ” のことです。広義には、 $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ の商や、あるいは、“ $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(1)$ ” という可除な変種も円分物と呼ばれます。遠アーベル幾何学において、この円分物の“管理”は非常に重要です。この点について、もう少し説明しましょう。

一言で “ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ” と言っても、数論幾何学には様々な “ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ” が登場します。例えば、以下が “ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ” の例です：

(a) (標数 0 の) 代数閉体 Ω に対する $\Lambda(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_n \mu_n(\Omega)$ — ここで、 $n \geq 1$ に対して、 $\mu_n(\Omega) \subseteq \Omega$ は、 Ω 中の 1 の n 乗根のなす群。

(b) (標数 0 の) 代数閉体 Ω 上の射影的で滑らかな代数曲線 C に対する $\Lambda(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H_{\text{ét}}^2(C, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ — ここで、 $i \geq 0$ に対して、 $H_{\text{ét}}^i$ は、 i 次エタールコホモロジー群を表す。

(c) (標数 0 の) 代数閉体 Ω 上の滑らかな代数曲線 C とその閉点 $c \in C$ に対する $I_c \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec}((\mathcal{O}_{C,c})^\wedge) \setminus \{c\})$ — ここで、 $\pi_1^{\text{ét}}$ は、エタール基本群を表す。(すなわち、同型を除けば、 Ω 係数 1 変数巾級数環の分数体 “ $\Omega((t))$ ” の絶対 Galois 群。)

これら (まったく異なる定義による) 加群たちは、実際、しばしば “ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ” という同一の記号で表されます。従

来の数論幾何学で、何故そのような記法が許されているのか、あるいは、何故そのような記法を採用しても本質的な齟齬が生じないのか、と言いますと、それは、もちろん、上記の加群の間に自然な同一視/正準的な同型が存在するからです。例として、(a) と (b) の円分物に対する従来の自然な同一視/正準的な同型の構成を復習しましょう。直線束の 1 次 Chern 類を考えることによって得られる射 $\text{Pic } C \rightarrow H_{\text{ét}}^2(C, \Lambda(\Omega))$ が自然な同型 $(\text{Pic } C / \text{Pic}^0 C) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(\Lambda(C), \Lambda(\Omega))$ を定めます。これにより、階数 1 の自由 \mathbb{Z} 加群である $\text{Pic } C / \text{Pic}^0 C$ の“次数 1 の直線束が定める元”という正準的な自明化から、自然な同一視/正準的な同型 $\Lambda(C) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\Omega)$ が定まるのでした。

この“円分物の自然な同一視”に関して、我々の議論において重要な意味を持つ事実の 1 つは、円分物の間そのような自然な同一視/正準的な同型は、考察下の設定の“環構造”から生じている、ということです。つまり、

従来当たり前のように行われている円分物の間の同一視は、スキーム論に代表される“環論的枠組み”のもとで行われる行為である

ということです。

それでは、遠アーベル幾何学に代表される“群論的枠組み”において、円分物の間そのような同一視はどうなるのでしょうか。この場合、そういった同一視は少なくとも直ちには存在しません。簡単な例を見てみましょう。例えば、標数 0 の 2 つの体 ${}^{\dagger}K$ と ${}^{\ddagger}K$ と、それらの代数閉包 ${}^{\dagger}\overline{K}$ と ${}^{\ddagger}\overline{K}$ を与えます。 ${}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K$, ${}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K$ というデータの間の“環論的”な結び付き、例えば、体の同型 ${}^{\dagger}\overline{K} \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}\overline{K}$ であって ${}^{\dagger}K \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}K$ という部分体の同型を誘導するものが与えられたとしましょう。すると、当然ですが、 $(\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K), \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K))$ 同変な円分物の間の同型 $\Lambda({}^{\dagger}\overline{K}) \xrightarrow{\sim} \Lambda({}^{\ddagger}\overline{K})$ が定まります。では、次に、 ${}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K$, ${}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K$ というデータの間の“群論的”な結び付き、例えば、位相群の同型 $\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K)$ を考えましょう。この状況では、“正準的な同型”どころか、そもそも、 $(\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K), \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K))$ 同変な同型 $\Lambda({}^{\dagger}\overline{K}) \xrightarrow{\sim} \Lambda({}^{\ddagger}\overline{K})$ が存在するかどうかすらわかりません。つまり、勝手に与えた同型 $\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K)$ がそれらの円分指標と両立的になるかどうかすらわからないのです。あるいは、与えた同型 $\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K)$ がそれらの円分指標と両立的、つまり、少なくとも 1 つは $(\text{Gal}({}^{\dagger}\overline{K}/{}^{\dagger}K), \text{Gal}({}^{\ddagger}\overline{K}/{}^{\ddagger}K))$ 同変な同型 $\Lambda({}^{\dagger}\overline{K}) \xrightarrow{\sim} \Lambda({}^{\ddagger}\overline{K})$ が存在すると仮定しましょう。この状況で、何らかの“正準的な同型” $\Lambda({}^{\dagger}\overline{K}) \xrightarrow{\sim} \Lambda({}^{\ddagger}\overline{K})$ は存在するのでしょうか。(例えば上の (c) の円分物を考えることによって) 簡単に確認できるとおり、(もちろん“正準的な”の意味や、また、考察している体たちがどのようなものであるかという問題にも依存しますが) 一般的な状況では基本的にはそのようなものは存在しません。

上の議論から、

スキーム論に代表される“環論的枠組み”とは対照的に、遠アーベル幾何学に代表される“群論的枠組み”では、円分物の間の従来の同一視を直ちに手に入れることはできない

という結論が得られます。したがって、この結論の帰結として、遠アーベル幾何学に代表される群論的枠組みでは、議論に登場する円分物“ $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ”はすべて区別されなければならないということがわかります。そして、そのような枠組みにおいて、“円分物の間の正準的な同型の存在”は“非自明な定理”となります。この“円分物の間の正準的な同型”は、円分同期化同型 (cyclotomic synchronization isomorphism)、あるいは、円分剛性同型 (cyclotomic rigidity isomorphism) と呼ばれ、特に遠アーベル幾何学では、その存在を証明することが重要となります。

既に紹介した (b) と (c) の円分物を用いて、円分同期化同型の例を見てみましょう。(b) と (c) の記号を用

います. $U \stackrel{\text{def}}{=} C \setminus \{c\}$ としましょう. 簡単のため, C は射影的で, かつ, その種数は 2 以上であると仮定します. 考察する群論的設定の “モデル” を $(I_c \subseteq \pi_1^{\text{ét}}(U) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(C))$ としましょう. つまり, このデータと — 副有限群の間の外部全射と閉部分群の組として — 同型なデータ $(H \subseteq G \rightarrow Q)$ を考えましょう. このとき, 簡単な考察から, 以下の “純群論的” 条件を満たす $G \rightarrow Q$ の中間商 $G \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow Q$ がただ 1 つ存在することがわかります: 合成 $H \hookrightarrow G \rightarrow \mathbb{E}$ は同型 $H \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\mathbb{E} \rightarrow Q)$ を定める. この条件より, \mathbb{E} は Q の H による拡大の構造を持つので, その拡大類 $[\mathbb{E}] \in H^2(Q, H)$ が考えられます. (H は I_c と同型な位相群ですので, 特に, アーベルです.) すると, 再び簡単な考察から, $[\mathbb{E}] \in H^2(Q, H)$ を $1 \in \widehat{\mathbb{Z}} = H^2(Q, \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(Q, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}}))$ に移すただ 1 つの同型 $H \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(Q, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ が存在することがわかります.

上の議論より, $(H \subseteq G \rightarrow Q)$ という “純群論的な設定” から, “純群論的な手続き” によって, (b) の円分物 (の群論版) $\text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(Q, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ (Q は “ $\pi_1^{\text{ét}}(C)$ の役” を演じていることを思い出しましょう) と (c) の円分物 H (H は “ I_c の役” を演じていることを思い出しましょう) の間の同型 $H \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(Q, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ が構成できました. また, 構成から簡単にわかるとおり, この同型は最初に与えた群論的設定 “ $(H \subseteq G \rightarrow Q)$ ” に関して閑手的です. そして, もしも最初に与えた群論的設定が “環論的設定” から生じている, つまり, ある適当な “モデル” $(I_c \subseteq \pi_1^{\text{ét}}(U) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(C))$ と一致している場合には, この同型は “従来の環論的な円分物の間の同一視” $I_c \xrightarrow{\sim} \Lambda(C)$ と一致します. この同型 “ $H \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(Q, \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ ” が円分同期化同型の例の 1 つです.

2 フロベニオイドの円分剛性同型

§3 で観察する “遠アーベル幾何学による対象の輸送” の具体的な例の準備のために, まず記号を設定しましょう. p を素数, k を p 進局所体 (つまり, \mathbb{Q}_p の有限次拡大), \bar{k} を k の代数閉包, $G_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{k}/k)$, $|\cdot|: \bar{k} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \mapsto |a|$) を \bar{k} の上の $|p| = p^{-1}$ と正規化された p 進絶対値,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times} &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid |a| = 1\} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid 0 < |a| \leq 1\} \\ &\subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid |a| \leq 1\} \subseteq \bar{k}, \\ \mathcal{O}_k^{\times} &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times})^{G_k} \subseteq \mathcal{O}_k^{\triangleright} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright})^{G_k} \subseteq \mathcal{O}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{G_k} \subseteq k = \bar{k}^{G_k} \end{aligned}$$

とします.

G を G_k の (位相群としての) 同型物 (isomorph) とします. (同型物とは “同型な対象” のことです.) このとき,

$$\mathcal{O}_k^{\times}, \mathcal{O}_k^{\triangleright}, \bar{k}^{\times}, \Lambda(\bar{k})$$

といった (乗法による) G_k 加群, G_k モノイド, G_k 加群, G_k 加群に対応する対象たち

$$\mathcal{O}_k^{\times}(G), \mathcal{O}_k^{\triangleright}(G), \bar{k}^{\times}(G), \Lambda(G)$$

を “純群論的” に, “単遠アーベル幾何学的” に (つまり, “アルゴリズム的” に) G から復元することができます. “単遠アーベル幾何学” という考え方については, 例えば, [9] の Introduction, §I2, や Remark 1.9.8 や §3 の後半の数々の Remark を参照ください. あるいは, 日本語でその簡単な解説が書かれた文献として, [1], §1, がありますので, そちらを参照ください. また, その “ \mathcal{O}_k^{\times} や $\mathcal{O}_k^{\triangleright}$ や \bar{k}^{\times} や $\Lambda(\bar{k})$ ” といった G_k 作用付きのモノイドに対応する対象をその出力とする復元アルゴリズム” についても, 例えば日本語でまとめた文献として, [1], §2, がありますので, そちらを参照ください. (厳密には, [1], §2, には, “ \mathcal{O}_k^{\times} ” や “ $\mathcal{O}_k^{\triangleright}$ ” の復元は明示的

には登場しません。しかし、“ \mathcal{O}_k^\times ” や “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ ” は復元していますので、その復元アルゴリズムに対して “ G の開部分群 H に付随する $k^\times(H)$ たちから $\bar{k}^\times(G)$ を構成する手続き” とまったく同様の手続きを施すことによって — つまり、様々な開部分群に対して “ \mathcal{O}_k^\times ” や “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ ” の復元アルゴリズムを適用してそれらを移行射で関連付けて順極限を取ることによって — \mathcal{O}_k^\times や $\mathcal{O}_k^\triangleright$ の対応物が復元されます.)

$$G \Rightarrow G \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times(G), \mathcal{O}_k^\triangleright(G), \bar{k}^\times(G), \Lambda(G)$$

(すなわち、 $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times, \mathcal{O}_k^\triangleright, \bar{k}^\times, \Lambda(\bar{k})$ の同型物).

次に、位相群作用付きモノイド $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\triangleright$ の同型物 $G \curvearrowright M$ を考察しましょう。このデータ $G \curvearrowright M$ は、フロベニオイド (Frobenioid — cf. [6], Definition 1.3) と呼ばれる数学的対象のある一例と等価なデータとなっています。こういったフロベニオイド (のある一例と等価なデータ — 簡単のため、以下、もうこれをフロベニオイドと言い切ってしまうが) が与えられたとき、その “ G ” の部分をエタールの (étale-like — cf., e.g., [6], Introduction, §I4) 部分と呼び、また、“ M ” の部分を Frobenius 的 (Frobenius-like — cf., e.g., [6], Introduction, §I4) 部分と呼びます。(この場合の) エタールの部分は、位相群で、出自は Galois 群ですから、つまり、“対称性” であり、感覚としては “質量のない”、“実体のない” (すなわち、“夢のような”、“仮想的な”) 対象です。一方、(この場合の) Frobenius 的部分は、位相モノイドで、出自は適当な数の集まりですから、感覚としては “質量のある”、“実体を持つ” (すなわち、“現実に存在する”、“実在する”) 対象です。

さて、上のようなフロベニオイド $G \curvearrowright M$ が与えられますと、さきほど述べたとおり、(G は G_k の同型物ですので) 単遠アーベル幾何学的に G から $G \curvearrowright \Lambda(G)$ という円分物を復元/構成することができます。一方、 M は $\mathcal{O}_k^\triangleright$ の同型物ですから、 n 倍写像の核 $M[n] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(n: M \rightarrow M)$ は $\mu_n(\bar{k})$ の同型物となり、その n に関する逆極限を取ることによって、 $\Lambda(M) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_n M[n]$ という $\Lambda(\bar{k})$ の同型物、つまり、円分物が得られます。 $G \curvearrowright \Lambda(G)$ の方はエタールの部分から構成したので “エタールの円分物” と呼び、 $G \curvearrowright \Lambda(M)$ の方は Frobenius 的部分から構成したので “Frobenius 的円分物” と呼ぶことにしましょう。この考察により、1 つのフロベニオイド $G \curvearrowright M$ から、エタールの円分物 $G \curvearrowright \Lambda(G)$ と Frobenius 的円分物 $G \curvearrowright \Lambda(M)$ という 2 つの円分物が得られました。

この (本来はまったく無関係な) 2 つの円分物に関して、以下の事実が知られています。([9], Remark 3.2.1, を参照ください.)

$G \curvearrowright M$ というデータから、関手的に、 G 同変な同型 $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ — つまり、Frobenius 的円分物とエタールの円分物との間の円分剛性同型 — を構成することができる。また、この円分剛性同型は、 $G \curvearrowright M$ が “環論的な設定” から生じている場合には、従来の円分物の間の同一視と一致する。

ここに登場する円分剛性同型は、しばしば “局所類体論を用いた円分剛性同型”、あるいは、“古典的な円分剛性同型” などと呼ばれています。

これまで “ $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\triangleright$ ” の同型物について議論をしてきましたが、Frobenius 的部分 “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ ” を、“ \mathcal{O}_k^\times ” や “ \bar{k}^\times ” に取り替えた対象の同型物を考察しても、上とまったく同様の手続きによって、やはりエタールの円分物と Frobenius 的円分物を構成することができます。しかしながら、それらの場合、上の $\mathcal{O}_k^\triangleright$ の場合のような “(単一の) 円分剛性同型” は存在しません。 \mathcal{O}_k^\times (または \bar{k}^\times) の場合、正準的な “単一の同型” が存在しないこと、及び、正準的な “同型 $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ のなすある $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ (または $\{\pm 1\}$) 軌道” の存在を証明することができます。(詳しくは、[9], Proposition 3.3, (i), やその証明を参照ください。) つまり、 \mathcal{O}_k^\times (または \bar{k}^\times) の場合、 $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$

(または $\{\pm 1\}$) という不定性を認めなければ、円分物の同期化を“正準化”することができないのです。

$$\begin{aligned} (G \curvearrowright M) \cong (G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times) : \quad \Lambda(M) &\xrightarrow[\sim]{\{1\} \curvearrowright} \Lambda(G) : \quad \text{正準的な単一の同型,} \\ (G \curvearrowright M) \cong (G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times) : \quad \Lambda(M) &\xrightarrow[\sim]{\widehat{\mathbb{Z}}^\times \curvearrowright} \Lambda(G) : \quad \text{正準的な } \widehat{\mathbb{Z}}^\times \text{ 軌道,} \\ (G \curvearrowright M) \cong (G_k \curvearrowright \overline{k}^\times) : \quad \Lambda(M) &\xrightarrow[\sim]{\{\pm 1\} \curvearrowright} \Lambda(G) : \quad \text{正準的な } \{\pm 1\} \text{ 軌道.} \end{aligned}$$

3 宇宙際 Teichmüller 理論における遠アーベル幾何学

この §3 では、§1 や §2 で議論した“円分物の同期化”を用いた“遠アーベル幾何学による対象の輸送”の例を観察しましょう。まず記号の導入ですが、本稿では、位相群 J 、位相 J 加群 A 、 $i \geq 0$ に対して、

$$\infty H^i(J, A) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{H \subseteq J} H^i(H, A)$$

— ここで、 H は J のすべての指数有限開部分群を走る — と書くことにします。

再び §2 で考察した $(G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times)$ の同型物として得られるフロベニオイド $G \curvearrowright M$ を用意しましょう。まず最初に、このフロベニオイドに対する“Kummer 理論”を復習します。 G 加群の完全系列 $1 \rightarrow M[n] \rightarrow M^{\text{gp}} \xrightarrow{n} M^{\text{gp}} \rightarrow 1$ の群コホモロジーを考えることによって単射 $(M^{\text{gp}})^G / ((M^{\text{gp}})^G)^n \hookrightarrow H^1(G, M[n])$ が得られます。そして、この単射の n に関する逆極限を取ることで、 $M^G \hookrightarrow ((M^{\text{gp}})^G)^\wedge \hookrightarrow H^1(G, \Lambda(M))$ という単射が得られます。したがって、この単射の G の開部分群に関する順極限を取ることで、

$$M \hookrightarrow \infty H(G, \Lambda(M))$$

という(所謂“Kummer 理論的”)単射が得られます。一方、例えば [1], §2, のとおり、 G という位相群からアルゴリズム的に $\text{Kmm}(G) : \overline{k}^\times(G)^G \hookrightarrow H^1(G, \Lambda(G))$ という単射を構成することができます。その定義から、 G に付随する円分物 $\Lambda(G)$ と G の開部分群に付随する円分物の間には自然な同一視 — つまり、円分同期化 — が存在しますので、この単射“ $\text{Kmm}(G)$ ”の G の開部分群に関する順極限を取ることで

$$\mathcal{O}_k^\times(G) \hookrightarrow \overline{k}^\times(G) \hookrightarrow \infty H^1(G, \Lambda(G))$$

という単射が得られます。

これらの単射を、§2 で述べた“局所類体論を用いた円分剛性同型” $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ と組み合わせると、次のような重要な帰結が得られます：

(*)：この円分剛性同型 $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ によって誘導される G 同変同型 $\infty H^1(G, \Lambda(M)) \xrightarrow{\sim} \infty H^1(G, \Lambda(G))$ は、上で述べた部分モノイドたちの間の同型

$$M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_k^\times(G)$$

を誘導する。

この G 同変同型を $\text{Kmm}(G \curvearrowright M)$ と書くことにしましょう：

$$\text{Kmm}(G \curvearrowright M) : M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_k^\times(G).$$

それほどの困難を要することなく確認できる事実なのですが、実は、“局所類体論を用いた円分剛性同型”を、この性質 (*) を満たすただ 1 つの同型 $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ として特徴付けることも可能です。

上の事実から、円分剛性同型を通じて、モノイドの G 同変同型 $\text{Kmm}(G \curvearrowright M): M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_k^{\Sigma}(G)$ が得られました。このような、つまり、フロベニオイドの Frobenius 的部分とエタールのモノイド (すなわち、エタールの部分からアルゴリズム的に構成されたモノイド) との間の自然な同型を、宇宙際 Teichmüller 理論では、Kummer 同型 (Kummer isomorphism) と呼んでいます。Kummer 同型は、まったく役割の異なるエタールの部分と Frobenius 的部分とを直接的に結び付ける非常に重要な概念です。(例えば, [11], Introduction, の議論を参照ください。)

“輸送”の例を観察するために、§2 で考察した $(G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^{\Sigma})$ の同型物として得られる) フロベニオイドを 2 つ ${}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M, {}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M$ 用意しましょう。あえて大袈裟に言えば、 ${}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M$ や ${}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M$ は、それぞれ 1 つの“数学の世界/宇宙”です。“ p 進局所体の乗法的な数論の研究”とは、大雑把には、この ${}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M$ や ${}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M$ の構造の研究に他なりません。

ここで、この独立した 2 つの“数学の世界/宇宙”の間に、エタールの関連付け、例えば、位相群としての同型 $\alpha: {}^{\dagger}G \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}G$ を与えましょう。この

$$2 \text{ つの “数学の世界/宇宙” } {}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M, {}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M \text{ とその間のエタールの結び付き } \alpha: {}^{\dagger}G \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}G$$

というデータが、“遠アーベル幾何学を用いたエタールの結び付きによる対象の輸送”という操作の、典型的な設定となります。さて、そのような設定が与えられると、何が起こるのでしょうか。さきほどの Kummer 同型を用いた

$${}^{\dagger}M \xrightarrow{\text{Kmm}({}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M)} \mathcal{O}_k^{\Sigma}({}^{\dagger}G) \xrightarrow{\mathcal{O}_k^{\Sigma}(\alpha)} \mathcal{O}_k^{\Sigma}({}^{\ddagger}G) \xrightarrow{\text{Kmm}({}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M)^{-1}} {}^{\ddagger}M$$

という合成を考えることによって、 $({}^{\dagger}G, {}^{\ddagger}G)$ 同変な Frobenius 的部分の間の同型 ${}^{\dagger}M \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}M$ が得られるのです。つまり、このようにして、エタールの部分の結び付き ${}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}G$ のみから、単遠アーベル幾何学を用いて、“ \dagger ”の側の Frobenius 的部分 ${}^{\dagger}M$ を、“ \ddagger ”の側に輸送することができるのです。

ここでの議論は、大雑把にまとめますと、まず最初に、

- Frobenius 的部分を、円分剛性同型を用いて得られる Kummer 同型を通じて、エタールの部分によって構成される“入れ物”に“梱包”して

(我々の例の場合、“入れ物”とは、エタールの円分物による群コホモロジーの順極限 ${}_{\infty}H^1(G, \Lambda(G))$ 、あるいは、エタールのモノイド $\mathcal{O}_k^{\Sigma}(G)$ のことです)、それから、

- エタールの部分の間の与えられた結び付きによって、梱包済みの Frobenius 的部分を向こう側に輸送するとなります。つまり、

円分物さえ適切に管理されていれば — すなわち、円分剛性が適切に与えられていれば — エタールの部分の間の関連付けのみから Frobenius 的部分の間の関連付けを導くことができる

ということなのです。これが“遠アーベル幾何学を用いたエタールの結び付きによる対象の輸送”の例です。

上で説明した例は非常に理想的な状況のそれであり、実際、輸送の最終的な出力として、“単一の正準的な同型” $({}^{\dagger}G \curvearrowright {}^{\dagger}M) \xrightarrow{\sim} ({}^{\ddagger}G \curvearrowright {}^{\ddagger}M)$ を得ることができました。しかしながら、宇宙際 Teichmüller 理論では、より複雑な状況を扱わなければならない、その結果、輸送の出力に、しばしばある“不定性”が生じます。そして、こ

の不定性の管理が、宇宙際 Teichmüller 理論では非常に重要となります。

不定性の管理を適切に行うために、その出自を分析しましょう。不定性の出自には、主に、以下の 2 つの種類があると考えられます：

(a) Kummer 同型によって Frobenius 的対象からエタールの対象に移行する際に生じる不定性。(さきほどの例で言えば、 $\text{Kmm}(G \curvearrowright M)$ という同型に不定性があり、その結果として出力に生じる不定性。)

(b) エタールの部分の結び付きに不定性があり、それが出力に影響して生じる不定性。(さきほどの例で言えば、 α という同型に不定性があり、その結果として出力に生じる不定性。)

宇宙際 Teichmüller 理論では、(a) の形の不定性を **Kummer 離脱不定性** (Kummer-detachment indeterminacy — cf. [12], Remark 1.5.4), (b) の形の不定性を **エタール輸送不定性** (étale-transport indeterminacy — cf. [12], Remark 1.5.4) と呼んでいます。つまり、簡単に言ってしまえば、

“Kummer 離脱不定性” は “梱包” の際に (あるいは、 “梱包を解く” 際に) ついてしまう “傷”， “エタール輸送不定性” は “輸送” の際についてしまう “傷”

ということです。

例として、§2 の最後の部分で議論した Frobenius 的部分を $\mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times}$ (または \bar{k}^{\times}) の同型物に取り替えることで得られる対象の場合を考察してみましょう。この場合、そこで議論したとおり、エタールの円分物と Frobenius 的円分物の間の円分剛性同型に、 $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ (または $\{\pm 1\}$) の作用という不定性が生じます。これにより、さきほどの例と同じような方法で “Kummer 同型” を構成しますと、所望の同型 $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times}(G)$ (または $M \xrightarrow{\sim} \bar{k}^{\times}(G)$) にも $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ (または $\{\pm 1\}$) の作用という不定性が生じます。したがって、ある単一の同型 $\alpha: \dagger G \xrightarrow{\sim} \ddagger G$ から出発してさきほどと同様の方法で輸送を行うと、最終的な同型 $\dagger M \xrightarrow{\sim} \ddagger M$ にも $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ (または $\{\pm 1\}$) の作用という不定性が生じることとなります。この $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ (または $\{\pm 1\}$) 不定性が、**Kummer 離脱不定性** の典型的な例です：

$$\begin{aligned} \dagger M, \ddagger M &\cong \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright} : & \dagger M &\xrightarrow{\{1\} \curvearrowright} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\dagger G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\ddagger G) \xrightarrow{\{1\} \curvearrowright} \ddagger M, \\ \dagger M, \ddagger M &\cong \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times} : & \dagger M &\xrightarrow{\widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \curvearrowright} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times}(\dagger G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\times}(\ddagger G) \xrightarrow{\widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \curvearrowright} \ddagger M, \\ \dagger M, \ddagger M &\cong \bar{k}^{\times} : & \dagger M &\xrightarrow{\{\pm 1\} \curvearrowright} \bar{k}^{\times}(\dagger G) \xrightarrow{\sim} \bar{k}^{\times}(\ddagger G) \xrightarrow{\{\pm 1\} \curvearrowright} \ddagger M. \end{aligned}$$

最後に、エタールの部分の間の結び付きが (さきほど考察したような) “単一の同型 $\alpha: \dagger G \xrightarrow{\sim} \ddagger G$ ” ではない場合を考察してみましょう。 $\dagger G \curvearrowright \dagger M$ と $\ddagger G \curvearrowright \ddagger M$ を $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}$ の同型物として得られるフロベニオイドとします。そして、それらのエタールの部分の間の結び付きを “位相群 $\dagger G$ と $\ddagger G$ の間の同型射全体 $\text{Isom}(\dagger G, \ddagger G)$ ” — §6 で導入される用語を用いれば、 “充満多重同型 $\dagger G \xrightarrow{\sim} \ddagger G$ ” — としましょう。この場合には、簡単に確認できるとおり、エタールのモノイドの間の同型 $\mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\dagger G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\ddagger G)$ に “ $\text{Aut}(\dagger G) \cong \text{Aut}(\ddagger G)$ が誘導する作用” という不定性が生じることとなります。したがって、最終的な同型 $\dagger M \xrightarrow{\sim} \ddagger M$ にも “ $\text{Aut}(\dagger G) \cong \text{Aut}(\ddagger G)$ が誘導する作用” という不定性が生じます。この不定性が **エタール輸送不定性** の典型的な例です：

$$\dagger M \xrightarrow{\{1\} \curvearrowright} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\dagger G) \xrightarrow{\text{Aut}(\dagger G) \cong \text{Aut}(\ddagger G) \curvearrowright} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{\triangleright}(\ddagger G) \xrightarrow{\{1\} \curvearrowright} \ddagger M.$$

4 Diophantus 幾何学的結果へのリンクによるアプローチ

§4 から §12 では、(宇宙際 Teichmüller 理論の応用として得られる) ある Diophantus 幾何学的結果に到達するために、“何をすれば良いか”, “どのようなアプローチがあり得るか”, “そのアプローチの枠組みで何ができるか” という問題についての考察を行おうと思います.

まず最初に記号を設定します. F を数体 (つまり, \mathbb{Q} の有限次拡大), \bar{F} を F の代数閉包, $G_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{F}/F)$, $\mathbb{V}(F)$ を F の素点のなす集合, E を F 上の楕円曲線, $X \subseteq E$ を E からその原点を取り除くことによって得られる F 上の双曲的曲線とします. また, 各 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して, F_v を F の v での完備化, \bar{F}_v を \bar{F} を含む F_v の代数閉包, $G_v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \subseteq G_F$, $|\cdot|: \bar{F}_v \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \mapsto |a|$) を \bar{F}_v の上の絶対値であって v が素数 p の上の有限素点の場合には $|p| = p^{-1}$, v が無限素点の場合には $|1| = 1$ と正規化されているもの,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{O}}_v^\times &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{F}_v \mid |a| = 1\} \subseteq \bar{\mathcal{O}}_v^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{F}_v \mid 0 < |a| \leq 1\} \\ &\subseteq \bar{\mathcal{O}}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{F}_v \mid |a| \leq 1\} \subseteq \bar{F}_v, \\ \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\times &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\mathcal{O}}_v^\times)^{G_v} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{F}_v}^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\mathcal{O}}_v^\triangleright)^{G_v} \subseteq \mathcal{O}_{F_v} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathcal{O}}_v^{G_v} \subseteq F_v = \bar{F}_v^{G_v}, \end{aligned}$$

$E_v \stackrel{\text{def}}{=} E \times_F F_v$, $X_v \stackrel{\text{def}}{=} X \times_F F_v$ とします. そして, すべての有限素点 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して, E_v は \mathcal{O}_{F_v} 上の高々分裂乗法的還元を持つと仮定しましょう. 各素点 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して, $q_v \in \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ を E_v の q パラメータ (良い還元を持つ有限素点や無限素点では 1) とします. すると, この q パラメータの集まり

$$q_E \stackrel{\text{def}}{=} (q_v)_{v \in \mathbb{V}(F)} \in \prod_{v \in \mathbb{V}(F)} \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$$

は F 上の数論的直線束

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} “\{q_v \mathcal{O}_{F_v}\}_{v \in \mathbb{V}(F)}”$$

を定める (つまり, \mathcal{L} は “ q_E^{-1} から定まる数論的因子に付随する数論的直線束”) ので, その (数論的) 次数

$$\deg \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} -[F : \mathbb{Q}]^{-1} \sum_{v \in \mathbb{V}(F)} \log(\#\mathcal{O}_{F_v}/q_v \mathcal{O}_{F_v}) \quad (\leq 0)$$

(ここで, 集合 S に対して $\#S$ は S の濃度を表す) を考察することができます. そして, 宇宙際 Teichmüller 理論の応用として得られる Diophantus 幾何学的結果は, “数体上の楕円曲線に対する Szpiro 予想の解決”, つまり, 非常に大雑把には,

$$\text{数論的直線束 } \mathcal{L} \text{ の次数の絶対値 } |\deg \mathcal{L}| (= -\deg \mathcal{L}) \text{ の何らかの上からの評価}$$

です. 以下, しばらくの間, この “評価” を目標として, 議論を進めていきましょう.

次数の絶対値 $|\deg \mathcal{L}|$ を何らかの形で上から評価するために, 次のような考察を行います. もしも

$$2 \text{ 以上の整数 } N \text{ と比較的小さい非負実数 } C \text{ が存在して } |\deg \mathcal{L}^{\otimes N}| \leq |\deg \mathcal{L}| + C$$

となることを証明できたとします. すると, $\deg \mathcal{L}^{\otimes N} = N \deg \mathcal{L}$ ですから, 上記の不等式を変形することで,

$$|\deg \mathcal{L}| \leq C/(N-1)$$

という $|\deg \mathcal{L}|$ の上からの評価が得られます。したがって、我々の目標を達成するためには、上述の “ $|\deg \mathcal{L}^{\otimes N}| \leq |\deg \mathcal{L}| + C$ ” という不等式、あるいは、その極端な場合として、 $|\deg \mathcal{L}^{\otimes N}| = |\deg \mathcal{L}|$ 、すなわち、

$$\deg \mathcal{L}^{\otimes N} = \deg \mathcal{L}$$

なる等式が実現できれば充分だということです。

次に、この等式の実現の可能性を模索してみましょう。等式 “ $\deg \mathcal{L}^{\otimes N} = \deg \mathcal{L}$ ” の可能性を考察するために、まず、この等式に登場する “ $\deg \mathcal{L}^{\otimes N}$ ” と “ $\deg \mathcal{L}$ ” という値の出力の方法を思い出してみます。つまり、 $\deg \mathcal{L}$ (または $\deg \mathcal{L}^{\otimes N}$) という値は、 q_E (または $q_E^N \stackrel{\text{def}}{=} (q_v^N)_{v \in \mathbb{V}(F)} \in \prod_{v \in \mathbb{V}(F)} \mathcal{O}_{F_v}^\times$) なる “生成元” によって定義された数論的直線束 \mathcal{L} (または $\mathcal{L}^{\otimes N}$) の次数である、という事実を思い出しましょう。したがって、何らかの意味で、

$$q_E = q_E^N$$

なる等式が実現できれば、次数に関する所望の等式が得られるかもしれないということになります。

一方、ほとんどの “ E/F ” に対して、実際には “ $q_E = q_E^N$ ” とはなりません。(簡単にわかることですが、 $q_E = q_E^N$ となることと E がすべての素点で良還元を持つことは同値です。) 特に、そのほとんどの “ E/F ” に対して、少なくとも “単一の世界” で等式 “ $q_E = q_E^N$ ” を仮定すると、たちまち矛盾が起こります。

そこで、現在考察を行っている数学的設定 (つまり、数体 F やその上の楕円曲線 E などが属するある設定) の 2 つの同型物 ${}^\dagger \mathcal{G}$, ${}^\ddagger \mathcal{G}$ を用意して、

${}^\dagger \mathcal{G}$ での “ q_E^N ” (${}^\dagger q_E^N$ と書くことにしましょう) を ${}^\ddagger \mathcal{G}$ での “ q_E ” (${}^\ddagger q_E$ と書くことにしましょう) に移す ${}^\dagger \mathcal{G}$ と ${}^\ddagger \mathcal{G}$ の間の “リンク” (つまり、ある “結び付き” — 下で少し説明を補足します) ${}^\dagger \mathcal{G} \rightarrow {}^\ddagger \mathcal{G}$

を考えることにしましょう。(ちなみに、この “ \mathcal{G} ” という記号は、宇宙際 Teichmüller 理論の記号を踏襲したのではなく、本稿での説明の都合上導入した記号です。[10], [11], [12], [13] を探しても、この意味で用いられる “ \mathcal{G} ” という記号は見つけれられません。“Situation”, “Setting”, “Settei” の頭文字の “S” です。) このよう考えれば、少なくとも “たちまちの矛盾” は発生しません。つまり、例えば、 “単一の集合” であるところの \mathbb{Q} の中で “ $7 = 49$ ” という等式は — $7 \neq 49$ という当たり前の事実により — 直ちに矛盾を引き起こします。しかしながら、 \mathbb{Q} の 2 つの同型物 ${}^\dagger \mathbb{Q}$, ${}^\ddagger \mathbb{Q}$ を用意して、 ${}^\dagger 49 \in {}^\dagger \mathbb{Q}$ を ${}^\ddagger 7 \in {}^\ddagger \mathbb{Q}$ に移す全単射 ${}^\dagger \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} {}^\ddagger \mathbb{Q}$ を考察することには、何の問題もありません。また、当たり前ですが、そのような全単射は実際に存在します。

宇宙際 Teichmüller 理論にはしばしば “リンク (link)” という概念が登場します。このリンクという概念の数学的内容は、

“リンクの左辺、右辺のある一部のデータ、あるいは、それから復元/構成されるデータの間の (単一、または、複数の) 同型”

です。ですので、例えば、§3 で考察した “2 つのフロベニオイド ${}^\dagger G \curvearrowright {}^\dagger M$, ${}^\ddagger G \curvearrowright {}^\ddagger M$ のエタール的部分の間の同型 $\alpha: {}^\dagger G \xrightarrow{\sim} {}^\ddagger G$ ” は、2 つのフロベニオイド ${}^\dagger G \curvearrowright {}^\dagger M$, ${}^\ddagger G \curvearrowright {}^\ddagger M$ の間のリンク $({}^\dagger G \curvearrowright {}^\dagger M) \rightarrow ({}^\ddagger G \curvearrowright {}^\ddagger M)$ の一例と考えられます。(宇宙際 Teichmüller 理論にこのリンクは登場しませんが、これは、例えば “エタールリンク” と呼ぶに相応しいリンクでしょう。)

以下、説明のために、上で述べた “ ${}^\dagger q_E^N \mapsto {}^\ddagger q_E$ となるような ${}^\dagger \mathcal{G}$ と ${}^\ddagger \mathcal{G}$ の間のリンク ${}^\dagger \mathcal{G} \rightarrow {}^\ddagger \mathcal{G}$ ” を (総称して) “安直リンク” と呼ぶことにしましょう。

さて、当たり前ですが、上述の安直リンク、つまり、 ${}^\dagger q_E^N \mapsto {}^\ddagger q_E$ なる ${}^\dagger \mathcal{G}$ と ${}^\ddagger \mathcal{G}$ の間の結び付きを考えれば、

それだけで直ちに所望の等式 “ $\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{L}^{\otimes N}$ ” が得られるわけではありません。さきほど $\dagger 49 \in \dagger \mathbb{Q}$ を $\ddagger 7 \in \ddagger \mathbb{Q}$ に移す全単射 $\dagger \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathbb{Q}$ を例として登場させましたが、そのような全単射の存在から、実際に “7 という値 = 49 という値” という等式が得られるわけではないことと同様です。 $\dagger 49 \in \dagger \mathbb{Q}$ を $\ddagger 7 \in \ddagger \mathbb{Q}$ に移す全単射の存在は、実際の “値” に対する等式 “7 という値 = 49 という値” を導くわけではないのです。

では、どのようにすれば実際の値に対する等式 “ $\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{L}^{\otimes N}$ ” が得られるのでしょうか。ここで再び、

$\deg \mathcal{L}$ (または $\deg \mathcal{L}^{\otimes N}$) という値は、 q_E (または q_E^N) なる “生成元” によって定義された数論的直線束 \mathcal{L} (または $\mathcal{L}^{\otimes N}$) の次数である

という事実を思い出しましょう。つまり、安直リンクの条件に登場する $\dagger q_E^N$ や $\ddagger q_E$ から所望の等式に登場する $\deg \mathcal{L}^{\otimes N}$ や $\deg \mathcal{L}$ を得るためには、“それら生成元から定まる数論的直線束の次数の計算” を行う必要があります。したがって、

安直リンク (つまり、 $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる適当な結び付き) $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \ddagger \mathfrak{G}$ であって、“それら生成元から定まる数論的直線束の次数の計算の仕組み” を保つもの

が存在すれば、所望の等式 “ $\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{L}^{\otimes N}$ ” が得られるはずだということです。そして、実際にそれが (ある意味で) 実現可能であるという主張が、非常に大雑把には、宇宙際 Teichmüller 理論の主定理となります:

宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の雰囲気: (“充分一般的な E/F ” に対して) $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる適当なリンク $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \ddagger \mathfrak{G}$ が存在して、それは、 $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ の両辺を生成元とする数論的直線束の次数の計算の仕組みと (軽微な不定性を除いて) 両立的となる。

上で例として挙げた $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ なる全単射 $\dagger \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathbb{Q}$ の設定において、“次数の計算方法” として、“ $n\mathbb{Z}$ の次数は $\log(\sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ ” を採用したとしましょう。そして、(この場合には実際にはそれは不可能ですが)

(*): この全単射 $\phi: \dagger \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathbb{Q}$ が、部分集合の間の加群の同型 $\dagger \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathbb{Z}$ を導き、かつ、次数の計算の仕組みとも両立的 — つまり、 $\log(\sharp(\dagger \mathbb{Z}/\dagger n \dagger \mathbb{Z})) = \log(\sharp(\phi(\dagger \mathbb{Z})/\phi(\dagger n)\phi(\dagger \mathbb{Z})))$ —

となることを証明できたとしましょう。先述のとおり、 $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ なる全単射 $\dagger \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathbb{Q}$ の存在だけでは、“7 = 49” という等式は得られません。しかしながら、(*) によって得られる “次数計算の仕組みの両立性” により、

$$\log 49 = \log(\sharp(\dagger \mathbb{Z}/\dagger 49 \dagger \mathbb{Z})) = \log(\sharp(\phi(\dagger \mathbb{Z})/\phi(\dagger 49)\phi(\dagger \mathbb{Z}))) = \log(\sharp(\ddagger \mathbb{Z}/\ddagger 7 \ddagger \mathbb{Z})) = \log 7$$

という計算を通じて、所望の等式 “7 = 49” が得られます。(繰り返しますが、この例の場合には、もちろんそんなことは不可能です。)

5 コアの対象

それでは、次に、安直リンク $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \ddagger \mathfrak{G}$ における上述の両立性の可能性について考えてみましょう。目標は “ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ の左辺、右辺を生成元とする数論的直線束の次数の計算の仕組み” の両立です。当然、結び付き $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \ddagger \mathfrak{G}$ が、何か意味のある対象を少しでも共有しなければ、そのような両立は望めません。例えば、群の同型は単位元を単位元に移す、つまり、“単位元と両立的” ですが、それは、群の同型が、2 つの群の “群構造” を共有させるためです。当たり前ですが、2 つの群の下部集合の間全単射は、一般には単位元を単位元に移さな

い、すなわち、“単位元と両立的”ではありません。同様に、結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ が貧弱に過ぎる場合には所望の両立は望めないでしょう。“適切な共有可能対象の存在が所望の両立性を導く”という議論は、数学の基本的な考え方だと思われます。

安直リンクの議論は、宇宙際 Teichmüller 理論を理解するために必ずしも必要なものではありません。しかしながら、その議論は、宇宙際 Teichmüller 理論の主定理がどのような形のものになり得るか、それを（非常に粗いレベルではありますが）理解する助けになると思われます。ですので、この §5 と §6 では、特に、安直リンク $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ による“共有可能対象” — つまり、安直リンクのような結び付きによってその共有が可能となる対象 — を考察してみましょう。

ここで、用語の説明ですが、あるリンクにおいて“共有される（あるいは、共有可能な）（下部）構造/部分/対象”のことをそのリンクのコア的 (coric) 構造/部分/対象と呼びます。この用語を用いますと、以下で行われる議論は、“安直リンクのコア的対象の考察”ということになります。

まず第一に、いきなり大変な、しかしある意味で当たり前の帰結ですが、

考察下の結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ は、 $\dagger\mathcal{G}$ と $\ddagger\mathcal{G}$ における様々な対象の環構造とは両立しない

ということがわかります。何故ならば、必要な結び付きは $\dagger q_E^N$ を $\ddagger q_E$ に移さなければならないわけですが、一方、 $\dagger q_E^N$ を $\ddagger q_E$ に移すような環準同型は（ほとんどの“ E/F ”に対して）存在しません。§4 で $\dagger 49 \in \dagger\mathbb{Q}$ を $\ddagger 7 \in \ddagger\mathbb{Q}$ に移す全単射 $\dagger\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathbb{Q}$ を例として挙げましたが、この場合にも、 $\dagger 49 \in \dagger\mathbb{Q}$ を $\ddagger 7 \in \ddagger\mathbb{Q}$ に移す環準同型 $\dagger\mathbb{Q} \rightarrow \ddagger\mathbb{Q}$ は存在しません。このように、環論的にはあり得ない関連付け $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ を要求している以上、この結び付きは $\dagger\mathcal{G}$ と $\ddagger\mathcal{G}$ のそれぞれの環構造とは両立しないものとなります。 $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ なる全単射 $\dagger\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathbb{Q}$ の場合、このたった 1 つの条件“ $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ ”のみによって、考察下の全単射 $\dagger\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathbb{Q}$ を環準同型にすることができなくなる — つまり、たった 1 つの条件“ $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ ”によって、 $\dagger\mathbb{Q}$ と $\ddagger\mathbb{Q}$ の各々の環構造が“矢印の向こう側”ではまったく意味のないものになってしまう — という事実を、簡単に観察できると思えます。

ここで思い出すべき事実は、

所望の“ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ の左辺、右辺を生成元とする数論的直線束の次数の計算の仕組み”は、少なくとも従来のには、設定の環構造から定義/構成されるものである

という事実です。したがって、この安直リンクの“環構造との両立不可能性”は、そういった“仕組み”の両立という我々の目標に対する大きな障害となることが、容易に想像できると思えます。

ここで、再び用語の説明ですが、（解析的な設定における従来の意味での“正則構造”，及び、その下部構造である“実解析的構造”の数論的な設定における類似として）宇宙際 Teichmüller 理論では、環構造、環構造を含んでいる、環構造を復元できてしまう、あるいは、環構造から本質的に規定されている構造のことを正則 (holomorphic) 構造と呼びます。また、正則構造より（真に）弱いその下部の構造を単解 (析的) (mono-analytic) 構造と呼びます。この用語を用いますと、すぐ上の観察の結論は、

安直リンク $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ は正則構造と両立的にはなり得ない

となります。

所望の結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ が正則構造と両立的にはなり得ないという観察から、その結び付きにおいて、2 つの設定 $\dagger\mathcal{G}$, $\ddagger\mathcal{G}$ に属しているそれぞれの数体“ F ”, その代数閉包“ \overline{F} ”や完備化“ F_v ”, 完備化の代数閉包“ \overline{F}_v ”, 楕円曲線“ E ”や“ E_v ”, そして双曲的曲線“ X ”や“ X_v ”はコア的にはなり得ないことが直ちにわかり

ます。環構造と両立的ではないのですから、環やスキームを共有することは当然できません。

6 局所的単解対象のコア性

登場するすべての対象のコア性を議論していると話が長くなってしまいますので、ここでは、登場する局所的な代数的対象のコア性についての議論を行いましょ。以下、簡単のため、 $v \in \mathbb{V}(F)$ は有限素点とします。実際、 q_E が、したがって q_E^N が、非自明な挙動を示す場合はこの場合の更に特別な場合（すなわち、 E_v が悪い還元を持つ v の場合）だけですので、当面、有限素点での局所的な対象のコア性について議論をしましょ。 p を v の剰余標数とします。

局所的な Galois 群 “ G_v ” のコア性はどうでしょうか。少なくとも現時点までの議論で、この対象のコア性を妨げるものはありません。例えば、実際、結び付きの唯一の条件は “ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ ” ですが、 $\dagger G_v$ ($\dagger \mathcal{G}$ における “ G_v ” のことです) の $\dagger q_v^N$ への自然な作用と $\ddagger G_v$ ($\ddagger \mathcal{G}$ における “ G_v ” のことです) の $\ddagger q_v$ への自然な作用はどちらも自明ですので、特に、 $\dagger q_v^N \mapsto \ddagger q_v$ は ($\dagger G_v, \ddagger G_v$) 同変です。すなわち、 G_v から見れば q_v^N と q_v には大差はなく、それらを (たとえ環論的にはあり得ない方法で) 結び付けられても、 G_v は特に困らない、ということです。これにより、“ G_v ” はコアの対象の候補です。

ここで、“ G_v のコア性” に関する注意なのですが、“ G_v ” をコア的とするためには、 G_v の “Galois 群としての解釈” は捨てなければなりません。従来 Galois 群 G_v は、 \overline{F}_v という体の適当な自己同型のなす群として定義されます。つまり、従来 Galois 群 G_v は、“ $G_v \subseteq \text{Aut}(\overline{F}_v)$ ” という環論的な基点 (あるいは、環論的な解釈) を持っているのです。しかし、§5 の後半で見たとおり、考察下の結び付きは環構造と両立的ではないのですから、もちろん Galois 群のこの環論的な基点の両立を許さないため、結果として、“ G_v ” の共有 — つまり、 $\dagger G_v$ と $\ddagger G_v$ の同一視 — は、基点のような正則構造を捨てて、それぞれを抽象的な位相群と見做したときに初めて可能となります。したがって、“ G_v ” をコア的としたい、すなわち、 $\dagger G_v$ と $\ddagger G_v$ を同一視したいわけですが、その同一視を表現する同型 “ $\dagger G_v \xrightarrow{\sim} \ddagger G_v$ ” は、この 2 つの位相群の間の “すべての同型射たち” をその可能性として考慮しなければなりません。別の言い方をしますと、 $\dagger G_v$ と $\ddagger G_v$ の同一視は、同型 $\dagger G_v \xrightarrow{\sim} \ddagger G_v$ の $\text{Aut}(\dagger G_v) \cong \text{Aut}(\ddagger G_v)$ 軌道を考えなければ行なうことができない、ということです。 $\dagger G_v$ と $\ddagger G_v$ は別々の独立の設定に属するただの抽象的な位相群なので、その間の “同一視” に “ただ 1 つの正解” などもちろんなく、したがって、我々は、どのような方法で同一視されても問題ない理論を構築する、という立場を取らざるを得ないので、同一視 $\dagger G_v \xrightarrow{\sim} \ddagger G_v$ に付加されてしまうこの $\text{Aut}(\dagger G_v) \cong \text{Aut}(\ddagger G_v)$ の作用という不定性によって、§3 で行ったように “ \dagger ” の側の対象を “ \ddagger ” の側に単遠アーベル幾何学を用いて輸送する際には、(§3 の最後の部分で例示したような) エタール輸送不定性が生じることとなります。(この不定性は §10 の冒頭で再び議論されます。)

ここで、用語の説明ですが、宇宙際 Teichmüller 理論では、ある 2 つの対象 A, B に対して、 A から B への射のなすある (通常空でない) 集合を 多重射 (poly-morphism) と、 A から B への同型射のなすある (通常空でない) 集合を 多重同型 (poly-isomorphism) と、 A から B への同型射全体のなす集合を 充満多重同型 (full poly-isomorphism) と呼びます。したがって、通常の “射” は自然に多重射と見做せ、充満多重同型は多重同型であり、そして、多重同型は多重射です。この用語を用いますと、上で述べた議論の結論は、“ $\dagger G_v$ と $\ddagger G_v$ の間の同一視は充満多重同型 $\dagger G_v \xrightarrow{\sim} \ddagger G_v$ を用いて行なうなければならない” となります。

ちなみに、§4 から出発してここまでその考察を続けてきた “Diophantus 幾何学的結果へのリンクによるアプローチ” ですが、その枠組みにおいて、必ずしも遠アーベル幾何学を用いる必要はありません。当たり前ですが、“遠アーベル幾何学を積極的に用いること” が (たとえ筆者の趣味ではあっても) 我々の目的なのではな

く、§4 で述べた “ある評価/不等式の実現” が我々の目標です。では、何故宇宙際 Teichmüller 理論に遠アーベル幾何学が用いられるのでしょうか。その問への答えの 1 つが、ここまでの議論によって明らかになります。所望の不等式を得る方法として (これまで考察を続けてきたような) “リンクによるアプローチ” を採用しますと、§5 の後半で観察したとおり、環構造とは両立しない設定を考察しなければなりません。環構造が通用しない、環構造を放棄した状態に自らを置く必要があります。一方、すぐ上で観察したとおり、ある適当な絶対 Galois 群 (つまり、“ G_v ”) は (ある不定性のもと) 両立可能であることがわかりました。すなわち、“リンクによるアプローチ” を採用しますと、必然的に、

様々な環の環構造を放棄せざるを得ないが、しかし、適当な絶対 Galois 群は通用するという設定において、ある非自明な帰結を導く必要がある

という展開になるのです。少なくとも筆者は、そのような状況において十分に適用可能な数論幾何学の研究分野を遠アーベル幾何学の他に知りません。(そもそも数論幾何学の研究において、“様々な環の環構造の放棄” という行為自体が既に非常に珍しいと思います。例えば Galois 表現をその主要な対象とする数論幾何学の研究の場合、表現空間の基礎環 — つまり、典型的には “ $GL_n(-)$ ” の “ $(-)$ ” のところに登場する環 — の環構造を放棄するわけにはいきません。また、遠アーベル幾何学と同じく “圏の構造による代数多様体の復元” をその目的とする研究として、例えば、与えられた代数多様体の (準) 接続層のなす圏やその導来圏から元々の代数多様体を復元する研究があります。しかし、そのような研究の場合、筆者の知識では、考察下の圏は、“抽象的な圏” としてではなく、“基礎体上の線型的な圏” として取り扱われるため、やはり基礎体の環構造を放棄するわけにはいきません。) これが、宇宙際 Teichmüller 理論で遠アーベル幾何学が用いられる理由の 1 つです。

さて、話を安直リンクのコアの対象の考察に戻しましょう。局所的な代数閉体 “ \bar{F}_v ” はコア的でないという事実を §5 で確認しましたが、それでは、体 \bar{F}_v の (位相群作用付き) 下部加法加群 “ $G_v \curvearrowright (\bar{F}_v)_+$ ” という単解対象はどうでしょうか。この対象のコア性には議論の余地はあるのですが、例えば以下の理由から不採用にしようと思います。これまでの議論のとおり、最終的には様々な数論的直線束を扱いたいので、 $(\bar{F}_v)_+$ それ自体というより、その整構造である \bar{O}_v の下部加法加群 $(G_v \curvearrowright) (\bar{O}_v)_+ \subseteq (\bar{F}_v)_+$ の方が、我々の議論の観点からは、有り難い対象です。一方、例えば [1], §2, の最後の部分で議論しているとおり、この整構造 $(\bar{O}_v)_+ \subseteq (\bar{F}_v)_+$ は、体 \bar{F}_v の “環構造の体現” のような存在であり、環構造と両立しない結び付きにおける共有は許されません。つまり、 $(\bar{O}_v)_+ \subseteq (\bar{F}_v)_+$ は “正則的整構造” と呼ばれるべき整構造であり、正則構造と両立しない結び付きで共有するわけにはいかないのです。したがって、 $(\bar{F}_v)_+$ をコアの対象とするならば、その整構造は放棄しなければなりません。一方、もしもその整構造を放棄するならば、この加群 $G_v \curvearrowright (\bar{F}_v)_+$ は、以下で議論するとおり、乗法的な加群 “ $G_v \curvearrowright \bar{O}_v^{\times \mu}$ ” から “復元可能” です。そちらをコアの対象として採用すれば、事は足りてしまうのです。

次に、局所的な乗法的モノイドという単解対象について考察しましょう。局所的乗法群 “ $G_v \curvearrowright \bar{F}_v^\times$ ” や局所的乗法的モノイド “ $G_v \curvearrowright \bar{O}_v^\triangleright$ ” はコア的となり得るでしょうか。これは、以下の観察により不可能です。所望の結び付きは $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ とならなければならない、つまり、“ q_E^N ” と “ q_E ” を非従来的な形で結び付けなければなりません。したがって、“ q_v^N ” と “ q_v ” を従来的な形で含む群 \bar{F}_v^\times やモノイド \bar{O}_v^\triangleright を共有することはできないのです。もう少し厳密な説明として、以下の考察から、これら対象の共有が不可能であることがわかるといえます。(簡単のため、“ $G_v \curvearrowright \bar{O}_v^\triangleright$ ” の場合を考えます。) 抽象的な位相群作用付きモノイドの間の同型 $(\dagger G_v \curvearrowright \dagger \bar{O}_v^\triangleright) \xrightarrow{\sim} (\ddagger G_v \curvearrowright \ddagger \bar{O}_v^\triangleright)$ が与えられたとしますと、それぞれ位相群の作用の不変部分を考えることによって、抽象的なモノイドの間の同型 $\dagger \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ が得られます。すると、簡単にわかるとおり、この同型は、値群部分の間の抽象的なモノイドとしての同型 $\dagger \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright / \dagger \mathcal{O}_{F_v}^\times \xrightarrow{\sim} \ddagger \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright / \ddagger \mathcal{O}_{F_v}^\times$ を誘導します。一方、値群部分

$\dagger\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\dagger\mathcal{O}_{F_v}^\times, \ddagger\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\ddagger\mathcal{O}_{F_v}^\times$ は “ \mathbb{N} ” と同型ですので、そのような同型はたった 1 つ、 $\dagger\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\dagger\mathcal{O}_{F_v}^\times$ のただ 1 つの生成元 (つまり, “ $1 \in \mathbb{N}$ ”) を $\ddagger\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\ddagger\mathcal{O}_{F_v}^\times$ のただ 1 つの生成元 (つまり, “ $1 \in \mathbb{N}$ ”) に移すものしかありません。したがって、もしも q_v が 1 でない (つまり, q_v の値群部分 $\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\mathcal{O}_{F_v}^\times$ で値が 0 でない) ならば、最初に与えた同型 ($\dagger G_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$) $\xrightarrow{\sim}$ ($\ddagger G_v \curvearrowright \ddagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$) による $\dagger q_E^N$ の像が $\ddagger q_E$ となることはあり得ないのです。ここで議論は、大雑把には、

結び付きの条件 $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ は値群 “ $\mathcal{O}_{F_v}^\triangleright/\mathcal{O}_{F_v}^\times \subseteq F_v^\times/\mathcal{O}_{F_v}^\times$ ” の変形を引き起こすが、一方, “ $G_v \curvearrowright \overline{F}_v^\times$ ” や “ $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ ” の共有は値群を剛化する、つまり、値群の変形を阻害する

とまとめられると思います。

上述のとおり、値群と密接に関わる $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ は、そのままではコア的とはなりません。では、局所的単数群 “ $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ ” はコア的となるのでしょうか。この対象は、値群において自明になる部分であり、特に、値群の変形 $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ を直ちには阻害しないため、コア的になり得ます。しかしながら、 (§7 で説明される) “アルゴリズムの多輻性” に関連する問題によって、安直な共有はあまりよろしくありません。これから先の議論において、 §3 で説明した “単遠アーベル幾何学的輸送”, すなわち、単遠アーベル幾何学を用いた対象の輸送を行います。つまり、結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ のもと、 $\dagger\mathcal{G}$ の適当な対象と $\ddagger\mathcal{G}$ の適当な対象とを、単遠アーベル幾何学を用いて関連付けます。一方、上で観察した “ G_v ” の場合と同様、もしも “ $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ ” という対象をコア的とするならば、その対象が環論的にどのように生じたか、などといった従来備わっている正則構造を捨て去り、単解対象として — つまり、抽象的な位相群作用付き加群として — 共有されなければなりません。ここで、簡単に確認できるように、抽象的な位相群作用付き加群としての $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ には $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ が自然に作用して、その作用は $\overline{\mathcal{O}}_v^\times$ から生じる円分部分 $\overline{\mathcal{O}}_v^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathcal{O}}_v^\times)_{\text{tor}} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ にも非自明に作用します。いかなる正則構造も含有していない $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ を考察しているため、この $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ 不定性を除去することはできません。ところが、 §3 で確認したとおり、我々はそのような円分物を用いて対象を輸送しなければいけません。したがって、様々な輸送にこの $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ 不定性の影響が生じて、所望の結論を得ることができなくなってしまうのです。(円分物 “ Λ ” は、抽象的な加群として $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型ですので、その自己同型全体のなす群は $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ です。つまり、この “ $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ 不定性” は、円分物に対する “もっとも大きい不定性” なのです。) このような議論により — §3 の後半部分で導入した用語を用いれば、 “所望の結論の観点からは Kummer 離脱不定性が大きくなり過ぎるため” — 円分部分を含む加群である $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ を安直にコアの対象とすることはあまり望ましくありません。

$G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ を “円分部分を含む” という理由によって不適切なコアの対象だと考えるのであれば、 $\overline{\mathcal{O}}_v^\times$ のその円分部分 $\overline{\mathcal{O}}_v^\mu \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ による商として得られる単解対象 “ $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^\times/\overline{\mathcal{O}}_v^\mu$ ” はどうでしょうか。これがコア的にならない理由は現時点では何ともありません。この対象は適切なコアの対象となり得ます。

これまで行ってきた局所的モノイドに関する議論を簡単にまとめますと、以下ようになります:

- 体 \overline{F}_v の加法的な単解構造 $G_v \curvearrowright (\overline{F}_v)_+$ は、その整構造 $G_v \curvearrowright (\overline{\mathcal{O}}_v)_+ \subseteq (\overline{F}_v)_+$ が本質的に正則構造と関連付けられてしまうため、正則構造と両立的でない安直リンクのコアの対象には適切でない。
- 体 \overline{F}_v の乗法的な下部加群 $G_v \curvearrowright \overline{F}_v^\times$ やその部分モノイド $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ といった単解構造は、値群部分の情報をその商として含んでいるので、値群の変形を導く安直リンクのコアの対象にはならない。
- $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ の部分対象である $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ という単解対象は、円分物の情報をその部分として含んでいるので、これを安直にコアの対象としてしまうと、単遠アーベル幾何学的輸送に問題が発生するため、適切なコアの対象とは言い難い。

• $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times$ の円部分部分による商である $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ という単解対象は、変形の対象となる値群とも単遠アーベル幾何学的輸送のための円分物とも切り離されているため、適切なコアの対象の候補である。

上の “ $G_v \curvearrowright (\overline{F}_v)_+$ ” に関する議論で触れましたが、 $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ という対象から $G_v \curvearrowright (\overline{F}_v)_+$ という対象を “復元” することが可能です。実際、 p 進対数写像は G_v 同変同型

$$\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} \xrightarrow{\sim} (\overline{F}_v)_+$$

を誘導することが簡単にわかりますので、これによって $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ を $G_v \curvearrowright (\overline{F}_v)_+$ と “解釈” することによって、その “復元” が完了します。(この “復元” は、§8 や §9 で再び議論の対象となります。)

また、この議論から、特に、 $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ は自然に \mathbb{Q}_p 線型空間の構造を持つことが確認されます。一方、(再び上の “ $(\overline{F}_v)_+$ ” に関する議論でも述べたとおり) 我々が最終的に興味を持っている対象は数論的直線束であり、それを定義するためには、そういった \mathbb{Q}_p 線型空間そのものではなく、そういった \mathbb{Q}_p 線型空間の整構造が必要となります。 $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ の自然な整構造として、 G_v の各開部分群 $H \subseteq G_v$ に対する

$$\mathcal{I}_H^\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}((\overline{\mathcal{O}}_v^\times)^H \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^\times \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}) \subseteq (\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})^H$$

がありますので、コアの対象 $G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ に、この部分加群族 “ $H \mapsto \mathcal{I}_H^\kappa$ ” を付加構造として与えましょう。(簡単にわかるとおり、この \mathcal{I}_H^κ は有限生成 \mathbb{Z}_p 加群です。) この付加構造は、 $\times\mu$ -Kummer 構造 ($\times\mu$ -Kummer structure — cf. [11], Definition 4.9, (i)) と呼ばれています。

この §6 では、様々な局所的な代数的対象について議論をしました。最後に、そういった対象に対する記号の説明を与えます。それぞれ

$$G_v, \quad G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times, \quad (G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}; H \mapsto \mathcal{I}_H^\kappa \subseteq (\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})^H) \quad (\text{とだいたい等価なデータ})$$

を、宇宙際 Teichmüller 理論では、

$$\mathcal{D}_v^+, \quad \mathcal{F}_v^{+\times}, \quad \mathcal{F}_v^{+\times\mu}$$

という記号で表します。また、双曲的曲線 X_v には、 E_v が良い還元を持たないときには “ $\underline{X}_v \rightarrow X_v$ ” という、 E_v が良い還元を持つときには “ $\underline{X}_v \rightarrow X_v$ ” というある連結有限次エタール被覆が存在します。(これらの被覆については、§13, また、§17 の最後の部分で改めてもう少し説明が与えられます。) それぞれの場合に、 \underline{X}_v の緩和基本群 (tempered fundamental group) $\pi_1^{\text{temp}}(\underline{X}_v)$ を、あるいは、 \underline{X}_v のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_v)$ を Π_v と書いて、この Π_v (とだいたい等価なデータ) を、

$$\mathcal{D}_v$$

という記号で表します。そして、 Π_v は自然な全射 $\Pi_v \twoheadrightarrow G_v$ を通じて $\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ に自然に作用しますので、その作用によって定まるデータ $\Pi_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{F}_v$$

という記号で表します:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v^+ &\cong G_v \\ \mathcal{F}_v^{+\times} &\cong G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\times \\ \mathcal{F}_v^{+\times\mu} &\cong (G_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}; H \mapsto \mathcal{I}_H^\kappa \subseteq (\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})^H) \\ \mathcal{D}_v &\cong \Pi_v \\ \mathcal{F}_v &\cong \Pi_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright. \end{aligned}$$

§6 では $v \in \mathbb{V}(F)$ を有限素点ということにしていますが, この対象 \mathcal{D}_v^+ (または $\mathcal{F}_v^{+\times}; \mathcal{F}_v^{+\times\mu}; \mathcal{D}_v; \mathcal{F}_v$) には “無限素点版” もあり, それらを集めることで得られる対象 $\{\mathcal{D}_v^+\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$, (または $\{\mathcal{F}_v^{+\times}\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$; $\{\mathcal{F}_v^{+\times\mu}\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$; $\{\mathcal{D}_v\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$; $\{\mathcal{F}_v\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$) の同型物は, \mathcal{D}^+ (または $\mathcal{F}^{+\times}; \mathcal{F}^{+\times\mu}; \mathcal{D}; \mathcal{F}$) 素点縞 (\mathcal{D}^+ - (respectively, $\mathcal{F}^{+\times}$ -; $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ -; \mathcal{D} -; \mathcal{F} -) prime-strip — cf. [10], Definition 4.1, (iii) (respectively, [11], Definition 4.9, (vii); [11], Definition 4.9, (vii); [10], Definition 4.1, (i); [10], Definition 5.2, (i)) と呼ばれます. (正確には, F をその適当な拡大体に取り替えたり, また, より重要なこととして, 添字の “ v ” の範囲を, その拡大体のすべての素点とするのではなく, その適当な部分集合に制限する, といった修正を行う必要があるのですが — これについては §17 で改めて説明します.) 少なくとも有限素点では, “ \mathcal{F} 系” の対象は (付加構造付き) フロベニオイドであり, “ \mathcal{D} 系” の対象は位相群 (と等価なデータ) です. また, “ $+$ ” という記号は, 宇宙際 Teichmüller 理論では, “単解的” を表す記号となっています.

7 多輻的アルゴリズム

宇宙際 Teichmüller 理論では, “多輻的アルゴリズム” という特別な性質を満たすアルゴリズムが重要な役割を果たします. §8 で行う宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の “ミニチュア版” の説明のために, この §7 では, その “多輻的アルゴリズム” という概念についての簡単な説明を行います. (詳しくは, 例えば, [11] の Example 1.7 から Remark 1.9.2 までの部分を参照ください.)

まず最初に, 次のような設定を考察しましょう. 輻的データ (radial data — cf. [11], Example 1.7, (i)) と呼ばれるある数学的对象が与えられているとします. 次に, その輻的データからアルゴリズム的に構成できる (下部的) 対象である コア的データ (coric data — cf. [11], Example 1.7, (i)) が与えられているとします. このような設定を 輻的環境 (radial environment — cf. [11], Example 1.7, (ii)) と呼びます. 具体的には, 例えば, 以下のような輻的環境の例を考えることができます:

(a) “輻的データ” として, 1 次元複素線型空間 \mathbb{C} (の同型物) を, “コア的部分” として, 輻的データである \mathbb{C} (の同型物) から “その正則構造を忘れる” というアルゴリズムによって得られる下部 2 次元実線型空間 $\mathbb{R}^{\oplus 2}$ (の同型物) を採用する.

(b) 素数 p と p 進局所体 k とその上の双曲的曲線 C を固定する. このとき, 遠アーベル幾何学の研究によって, “位相群 $\pi_1^{\text{ét}}(C)$ から $(\pi_1^{\text{ét}}(C) \twoheadrightarrow G_k)$ という数論的な商を復元する純群論的アルゴリズム” の存在が知られている. ([4], Lemma 1.1.4, (ii), 及び, [4], Lemma 1.1.5, を参照ください.) “輻的データ” として, C のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(C)$ の同型物 Π を採用する. すると, 上述の純群論的アルゴリズムを輻的データである Π に対して適用することによって, Π の商 $\Pi \twoheadrightarrow G(\Pi)$ が得られる. (したがって, $\Pi \twoheadrightarrow G(\Pi)$ は $\pi_1^{\text{ét}}(C) \twoheadrightarrow G_k$ の同型物.) “コア的部分” として, この商 $G(\Pi)$ が定める “抽象的位相群 G ” — つまり, $G(\Pi)$ の “ Π の商” としての構造を忘却して得られる位相群 $G (\cong G(\Pi))$ — を採用する.

次に, 上記のような設定 (つまり, 上記のような 2 種類の数学的对象と, それらを結ぶアルゴリズム) に対して, 輻的データをその “入力” とするあるアルゴリズム Ψ が与えられたとしましょう. そのアルゴリズム Ψ がコア的データにのみ依存するとき, アルゴリズム Ψ は コアのアルゴリズム (corically defined algorithm/coric algorithm — cf. [11], Example 1.7, (iv)) と呼ばれます. そして, そのアルゴリズム Ψ の出力が “(輻的データと何らかの関連性があったとしても) コア的データの観点から記述可能” であるとき, アルゴリズム Ψ は 多輻的アルゴリズム (multiradially defined algorithm/multiradial algorithm — cf. [11], Example 1.7, (iv)) と, また, そうでないとき, アルゴリズム Ψ は 単輻的アルゴリズム (uniradially

defined algorithm/uniradial algorithm — cf. [11], Example 1.7, (iv)) と呼ばれます。

上の (a) の例を用いて、もう少し説明を補足しましょう。ここで、 Ψ を、輻的データ “ \mathbb{C} ” をその入力とするアルゴリズムとします。もしも Ψ が “ \mathbb{C} ” の正則構造には依存しない、つまり、下部実平面 “ $\mathbb{R}^{\oplus 2}$ ” にのみ依存するならば、定義から明らかのように、 Ψ はコア的アルゴリズムです。一方、アルゴリズム Ψ の内容が本質的に “ \mathbb{C} ” の正則構造に依存してしまう場合には、“ $\mathbb{C}^\times \subsetneq \text{GL}_2(\mathbb{R})$ ” という事実によって (つまり、コア的データの間の関連付けは一般には輻的データの間の関連付けに持ち上がらないという事実によって、あるいは、同じことですが、コア的データへの移行によって、輻的データが持っていた剛性の一部が失われるという事実によって)、このアルゴリズムの出力をコア的データである “ $\mathbb{R}^{\oplus 2}$ の観点から” 記述できるはずはありません。ですので、このアルゴリズム Ψ は、単輻的となります。後者の場合、つまり、 Ψ の内容が本質的に “ \mathbb{C} ” の正則構造に依存する場合に、コア的データ “ $\mathbb{R}^{\oplus 2}$ ” からこのアルゴリズムを眺めると、

アルゴリズム Ψ の出力は、採用した/選択した正則構造 (つまり、選択された上部輻的データ) に本質的に依存する

ということになります。別の言い方をしますと、

固定された “ $\mathbb{R}^{\oplus 2}$ ” がその下部実平面 (つまり、下部コア的データ) となるようないくつかの複素数平面たちに対して、“下部実平面の同一視/共有” と両立する形で、それらに Ψ を “同時実行” することはできない

ということです。このように、単輻的アルゴリズムとは、“多” 数の上部 “輻” 的データに同時に適用できない) 各々 “単” 一の特定の “輻” 的データのもとのみ意味を持つアルゴリズムです。そして、この状況とは対照的に、

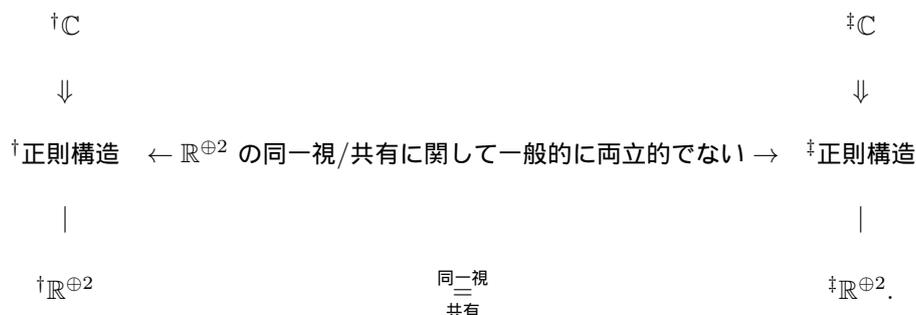
多輻的アルゴリズムとは、“コア的データの同一視/共有” と両立する形で “同時実行可能” なアルゴリズム

となります。多輻的アルゴリズムとは、“多” 数の上部 “輻” 的データに同時に適用可能な、“多” 数の上部 “輻” 的データに対して同時に意味を持つアルゴリズムなのです。

(a) の設定における、それぞれ単輻的構造、コア的構造の典型的な (そして、同義反復的な) 例として、

輻的データの正則構造, 輻的データの下部実平面の実解析的構造

を挙げることができます。輻的データ “ \mathbb{C} ” を入力として、“ \mathbb{C} の正則構造”, “ \mathbb{C} の下部実解析的構造” を出力とするアルゴリズムが、それぞれ単輻的, コア的となることは、容易に確認できると思います:



また、(a) の設定における多輻的構造の典型的な (そして、同義反復的な) 例として、

輻的データの正則構造の $GL_2(\mathbb{R})$ 軌道

を挙げることができます:

$$\begin{array}{ccc}
 \dagger\mathbb{C} & & \ddagger\mathbb{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \dagger\text{正則構造の } GL_2(\mathbb{R}) \text{ 軌道} & \leftarrow \mathbb{R}^{\oplus 2} \text{ の同一視/共有に関して両立的} \rightarrow & \ddagger\text{正則構造の } GL_2(\mathbb{R}) \text{ 軌道} \\
 | & & | \\
 \dagger\mathbb{R}^{\oplus 2} & \xrightarrow[\text{共有}]{\text{同一視}} & \ddagger\mathbb{R}^{\oplus 2}
 \end{array}$$

8 対数殻

§4 の最後の部分において,

“ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ ” なる (値群の非自明な変形 — §6 での “ \overline{F}_v^\times ” や “ $\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ ” に関する議論を参照 — の実現をその目的とした) 安直リンク $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ が, 変形 $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ の両辺から定まる数論的直線束の次数の計算と両立的になることを証明できれば, 所望の結論が得られるであろう

と述べました. また, §5 では,

その結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ は $\dagger\mathcal{G}$ と $\ddagger\mathcal{G}$ の正則構造とは両立しない

という事実を観察しました. 既に述べましたが, “ q_E^N や q_E から定まる数論的直線束の次数の計算” は少なくとも従来的にはそれぞれの設定の正則構造を用いて遂行される計算です. したがって, 正則構造とは両立しない結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ がその計算と両立的であることを証明するためには, (少なくとも従来的には正則構造を用いて行われる) その計算が, 実は何らかの単解的な対象によって記述可能であることを証明しなければなりません. 問題となっている計算が, いかなる意味においても正則構造を必要とするならば, 正則構造とは両立しない結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ がその計算と両立的であることを証明することはできないからです. つまり, 我々が目標を達成するためになすべきことは, 考察下の数論的直線束の次数の計算の仕組みを適切に単解的な形に表現し直すことだと言えます. あるいは, 同義反復的に言い換えれば,

我々の目標は, 考察下の数論的直線束の次数の計算の仕組みに対して, “コア的単解対象による再定式化”, “適切なコア的単解対象をコアのデータとする多輻的アルゴリズム” を与えること

だと言えます.

ここで, §5 や §6 の議論から導かれた

所望の結び付きは, $\dagger\mathcal{G}$ と $\ddagger\mathcal{G}$ の正則構造とは両立せず, コア的になり得る対象 (つまり, 両立可能対象) の候補は, 高々 D^+ 素点縞, あるいは, $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞のみである

という結論を思い出しましょう. これにより, 両立させたい対象たち, つまり, “考察下の数論的直線束やその次数の計算の仕組み” に関わる様々な対象たち — 例えば, 数論的直線束の生成元 “ q_E ” — を, この $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞を用いて記述しなければならないという帰結が得られます.

一方, $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞の Frobenius 的部分は (少なくとも v が有限素点の場合には) “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ ” という “単数的” な部分です. したがって, 例えば “ q_v ” のような “値群的” な元とは直ちには直接的な関連を持ちません. §6 の議論を思い出してみますと, 安直リンクによる変形の対象である値群部分を切り離して単数部分に移行することによってこのコアの対象候補 “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ ” を得たわけですから, この問題は必然です.

この問題, つまり, (“ q_E ” のような “考察下の数論的直線束やその次数の計算の仕組み” に関わる様々な対象たちを $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞を用いて記述しなければならないにもかかわらず)

ほとんど唯一のコアの対象候補である $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞は高々 “単数的” であり, 関心のある “値群的” な対象とは直ちには直接的な関連を持たない

という問題を克服するために, §6 で議論した “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ による $(\overline{F}_v)_+$ の復元” を思い出しましょう. §6 で述べたとおり, (§6 の設定のもと) p 進対数写像によって $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ を加法的に解釈した加群が $(\overline{F}_v)_+$ に他ならないのです. 一方, $(\overline{F}_v)_+$ の下部集合は元々の体 \overline{F}_v の下部集合と一致しますので, 当然 “値群的” な部分もその中に含んでいます. この “復元” により, つまり, コアの対象候補である $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点縞を対数写像を通じて加法的に再解釈することで, コア的な大きな “入れ物” が得られそうだと考えられます.

次に, 再び §6 で議論した “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ の整構造” を思い出しましょう. v が有限素点のときには, $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ は $\mathcal{I}_{G_v}^k \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ という整構造を持ちます. 上述のとおり, 我々は $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ を対数写像を通じて加法的に解釈するつもりなので, この整構造の加法的解釈も考察しましょう. (§6 の設定のもと) 体 F_v の下部加法加群 $(F_v)_+ \stackrel{\text{def}}{=} ((\overline{F}_v)_+)^{G_v}$ の部分加群

$$\mathcal{I}_v \stackrel{\text{def}}{=} (2p)^{-1} \cdot \text{Im}(\mathcal{I}_{G_v}^k \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} \xrightarrow{p \text{ 進対数}} (\overline{F}_v)_+) \subseteq (F_v)_+$$

を 対数殻 (log-shell — cf. [12], Definition 1.1, (i)) と呼びます. §6 でも述べたとおり, これは有限生成 \mathbb{Z}_p 加群です. しかも, 簡単に確認できるとおり,

$$(\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq \mathcal{I}_v, \quad \text{Im}(\mathcal{O}_{F_v}^{\times} \xrightarrow{p \text{ 進対数}} (F_v)_+) \subseteq \mathcal{I}_v, \quad \mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (F_v)_+$$

という包含関係が存在します. ([12], Proposition 1.2, (v), を参照ください.) (最初の包含関係, つまり “対数殻は正則的整構造 $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ — §6 での “ $(\overline{F}_v)_+$ ” に関する議論を参照 — を含む” という包含関係を実現するために, 対数殻の定義に “ $(2p)^{-1}$ ” が導入されています.) ここでは v を有限素点としましたが, この対数殻には “無限素点版” が存在して, やはり同様の性質を満たします. ([12], Definition 1.1, (ii), や [12], Proposition 1.2, (v), を参照ください.) そして, 有限素点, 無限素点, どちらの場合にも, この対数殻は, その (正則構造ではなく, それより真に弱い) 単解的な設定から構成/共有が可能な整構造であり, つまり, “単解的整構造” と呼ばれるべき整構造です:

$$(\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq (F_v)_+: \text{正則的整構造} \quad \mathcal{I}_v \subseteq (F_v)_+: \text{単解的整構造.}$$

包含関係 $(\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq \mathcal{I}_v$ (つまり “単解的整構造は正則的整構造を含む” という包含関係) から, q_E や q_E^N は $\prod_{v \in \mathbb{V}(F)} \mathcal{I}_v$ の元です. また, 一般には $(\mathcal{O}_{F_v})_+ = \mathcal{I}_v$ とはなりません (したがって, もちろん $q_v(\mathcal{O}_{F_v})_+ = q_v \mathcal{I}_v$ などとはなりません), 一方, \mathcal{I}_v の “体積の計算”, つまり, “局所的次数の計算” (正規化によりますが, 実質的には有限集合 $\mathcal{I}_v/(\mathcal{O}_{F_v})_+$ の位数の計算) は — したがって, $\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} (= (F_v)_+)$ のコンパクト部分集合の体積の計算も — 単解的に (この場合, つまり, G_v という抽象的な位相群の純群論的不変量から) 実行可能です. ([9], Proposition 5.8, (iii), を参照ください.) この議論によって,

コア的単解対象である $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点編から (対数写像部分を無視すれば — この点については §9 で改めて論じます) 構成可能な対数殻による, 所望の “数論的直線束やその次数の計算の仕組み” に関わる対象たちの局所部分 — 具体的には q_v や q_v^N やそれが生成するイデアル (つまり, 局所的な数論的直線束) の体積 (つまり, 局所的次数) — の記述可能性

の片鱗が見えてきます.

各 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して “ v での値群” とは $(\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times}$ に他なりませんので, F 上の数論的直線束全体の状況は, 自然な射 “ $F^{\times} \rightarrow \bigoplus_v ((\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times}) \leftarrow \bigoplus_v (\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times})$ ” というデータで管理されます. つまり, 簡単にわかることですが, “ $F^{\times} \rightarrow \bigoplus_v ((\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times}) \leftarrow \bigoplus_v (\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times})$ ” というデータ (と, 各 “ F_v ” に関する簡単な数値的情報) から, F 上の数論的直線束全体のなす圏を記述することができます. (これは, 代数幾何学の場合の “直線束の同型類のなす集合 = $H^1(\mathcal{O}^{\times})$ ” という理解の類似による記述と言えると思います.) 大雑把には, この管理の仕組みによる数論的直線束全体のなす圏が “ $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ ” と記述される大域的フロベニオイドです. ([12], Example 3.6, (i), を参照ください.) (このフロベニオイドは §22 に改めて登場します.) $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ という大域的フロベニオイドは, “ $F^{\times} \rightarrow \bigoplus_v ((\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times}) \leftarrow \bigoplus_v (\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times})$ ” というデータから生じるわけで, 特に, その定義が乗法的な情報のみから得られます. この性質により, 正則構造 (つまり, 環構造) と両立しない結び付きにおいても, その両立性が期待できます. 一方, 与えられた数論的直線束が $\bigoplus_v ((\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times})$ のどの元と関わるかという考察から, その数論的直線束の次数を計算することは一見可能のように見えますのですが, しかしながら, この $\bigoplus_v ((\mathcal{O}_{F_v}^{\triangleright})^{\text{gp}}/\mathcal{O}_{F_v}^{\times})$ は値群の集まりであり, それは我々の安直リンクの変形の対象ですので, この方法による次数の計算は安直リンクと両立しません.

あるいは, 数論的直線束とは適当な条件を満たす局所的な加群の集まりのことですので, F 上の数論的直線束全体の状況は, 自然な作用 $F \curvearrowright \prod_v (F_v)_+$ と整構造 $\prod_v (\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq \prod_v (F_v)_+$ というデータからも管理可能です. つまり, 再び簡単にわかることですが, このデータから, F 上の数論的直線束全体のなす圏を記述することができます. (これは, 代数幾何学の場合の “直線束は階数 1 の局所自由 \mathcal{O} 加群” という理解の類似による記述と言えると思います.) 大雑把には, この管理の仕組みによる数論的直線束全体のなす圏が “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ ” と記述される大域的フロベニオイドです. ([12], Example 3.6, (ii), を参照ください.) (このフロベニオイドも §22 に改めて登場します.) $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ という大域的フロベニオイドは, 上述のようなデータから生じるわけで, 特に, その定義のために, 乗法的な情報だけでなく加法的な情報も必要となります. そのため, $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ の場合と違い, 正則構造 (つまり, 環構造) と両立しない結び付きに対する両立性を期待することはできません. 一方, 整構造 $\prod_v (\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq \prod_v (F_v)_+$ を用いることで, 与えられた数論的直線束の次数を容易に計算することが可能です.

$\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$	乗法構造のみを用いて定義	⇒	両立性に優れている	次数計算は不適
$\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$	定義に環構造が用いられる	⇒	両立性に乏しい	次数計算可能

(例えば, [12], Fig. I.7, を参照ください.)

そして, 当たり前ですが, (結局は $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ も $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ も “数論的直線束のなす圏” なのですから) 数体 F の体構造から, これら 2 つの大域的な圏 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ の間の同義反復的な圏同値が得られます. つまり, 数体 F の体構造によって, これら 2 つの圏 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ のそれぞれの “利点” が同時活用可能となります:

$\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$	F の体構造	$\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$	“ $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ ” の両立性	別の設定での $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$...
数論的直線束の次数計算	\simeq		\simeq	

つまり, 通常の数論幾何学では, F の体構造は “既知” なので, “値群的解釈” による圏 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ と “加群的解釈” による圏 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ を区別する必要はありません. しかしながら, 我々の議論においては, その “ F の体構造”

が“非自明な情報”であるため、“数論的直線束”という概念に対するこの2つの解釈を区別しなければならない、ということになるのです。

さて、ここで、さきほど導入した対数殻 \mathcal{I}_v を思い出しましょう。この単解的整構造 $\mathcal{I}_v \subseteq (F_v)_+$ は $\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (F_v)_+$ という等式を満たします。また、上で述べた“対数殻 \mathcal{I}_v に関わる対象の体積計算可能性”から、この単解的整構造 $\prod_v \mathcal{I}_v \subseteq \prod_v (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \prod_v (F_v)_+$ を用いても、 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ の対象として与えられた数論的直線束の次数を計算することが可能です。この議論によって、

コア的単解対象である $\mathcal{F}^{\times \mu}$ 素点編から (対数写像部分を無視すれば — さきほども述べたとおり、この点については §9 で改めて論じます) 構成可能な対数殻による、所望の“数論的直線束やその次数の計算の仕組み”に関わる対象たちの大域部分 — 具体的には数論的直線束全体の圏やその対象たちの次数の計算 — の記述可能性

の片鱗が見えてきました。

これまでの考察の一部をまとめますと、“変形 $\dagger q_E^N \mapsto \dagger q_E$ の左辺から定まる数論的直線束の次数の計算”を表現するためには、数体 F や (変形の左辺である) q_E^N がどのように $\prod_v (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ に入っているか、あるいは、同じことですが、それらがどのように $\prod_v (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ に作用するか、を表現すれば充分であることがわかります：

$$q_E^N \rightsquigarrow \prod_v \mathcal{I}_v, \quad F \rightsquigarrow \prod_v (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

現時点では、宇宙際 Teichmüller 理論の主定理を正確な形で述べることはできませんが、その“ミニチュア版”を述べることは可能ですので、それを述べてしまいましょう。実際の主定理は、このミニチュア版を適切に修正したより大掛かりなものとなっていますが、非常に大雑把なレベルでは、だいたいこのミニチュア版のようなタイプの主張です。そして、それは、(やはり下記のミニチュア版が説明するように) ある多輻的アルゴリズムの存在を主張しています：

宇宙際 Teichmüller 理論の主定理のミニチュア版: (“充分一般的な E/F ” に対して) (数体 F やその上の楕円曲線 E などが属する) これまで議論してきたような数学的設定 \mathfrak{G} に対して、ある軽微な不定性が付加された

$$\{\mathcal{I}_v\}_v, \quad q_E^N \rightsquigarrow \prod_v \mathcal{I}_v, \quad F \rightsquigarrow \prod_v (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

という3つの対象をその出力データとする (適当な輻的環境のもとでの) 多輻的アルゴリズムが存在する。そして、このアルゴリズムは、 $\dagger q_E^N \mapsto \dagger q_E$ なる結び付き $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \dagger \mathfrak{G}$ と両立的となる。

実際的主定理において、このミニチュア版での “ $\dagger q_E^N \mapsto \dagger q_E$ なる結び付き $\dagger \mathfrak{G} \rightarrow \dagger \mathfrak{G}$ ” に対応する概念は、 Θ リンク (Θ -link) (実際には、それを進化させた “ $\Theta_{\text{LGP}}^{\times \mu}$ -link” — [12], Definition 3.8, (ii), を参照) と呼ばれる概念です。

これまで何度も言及してきたとおり、安直リンク (や、実際的主定理に登場する Θ リンク) は値群の変形を導きます。そして、このミニチュア版のとおり (あるいは、それ以前の議論のとおり)、対数殻という概念は、その値群の変形に関する重要な対象である “ q_E^N ” や “ F ” の “リンクの左辺, 右辺で共有される入れ物” として使用されます。したがって、上のミニチュア版のような主張を実現するためには、

(安直リンク系のリンクによる) 値群部分の変形から (リンクで共有したい入れ物である対数殻のもととなる) 単数部分の変形を回避する

ことが必要となります。値群部分と単数部分を適切に“切り離す”ことによって、値群部分のみを変形の対象として、単数部分は変形されない対象とするのです。これにより、値群部分の変形の具合を（“不動”の）単数部分によって、“評価”することができるようになるのです：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{変形させない} & & & \text{変形の対象} & \\
 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F_v}^\times & \longrightarrow & F_v^\times & \longrightarrow & F_v^\times / \mathcal{O}_{F_v}^\times \longrightarrow 1 \\
 & & & & & & \\
 & & \text{変形させない} & \rightsquigarrow & \text{変形させない} & & \text{変形の対象} \\
 \implies & \mathcal{O}_{F_v}^\times & (\text{乗法的}) & \overset{\text{対数}}{\rightsquigarrow} & \mathcal{I}_v & (\text{加法的}) & \curvearrowright F_v^\times / \mathcal{O}_{F_v}^\times.
 \end{array}$$

上の定理の正当性を認めましょう。すると、非常に粗いレベルでは、以下のような議論によって、所望の結論を得ることができます。（§12 の後半において、以下の説明より実際のそれに近い議論の説明が与えられます。）これまでと同様に $\dagger\mathcal{G}$, $\ddagger\mathcal{G}$ という考察下の設定の 2 つの同型物を用意します。すると、定理の最後のところで述べられているとおり、定理のアルゴリズムと両立的な “ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ ” なる適当な結び付き $\dagger\mathcal{G} \rightarrow \ddagger\mathcal{G}$ が存在します。このリンクから、 $\deg \dagger\mathcal{L}^{\otimes N} = \deg \ddagger\mathcal{L}$ という等式が得られます。（これ自体は驚くべきものではありません。これは、以前に登場した “ $\dagger 49 \mapsto \ddagger 7$ なる全単射 $\phi: \dagger\mathcal{Q} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathcal{Q}$ ” の例における等式 “ $\phi(\dagger 49) = \ddagger 7$ ” のようなものです。）一方、アルゴリズムの多輻性から、“ある軽微な不定性” のもとでの $\deg \dagger\mathcal{L}^{\otimes N} = \deg \ddagger\mathcal{L}^{\otimes N}$ という等式が得られます。この等式と上の等式とを併せることで、“ある軽微な不定性” のもとでの $\deg \ddagger\mathcal{L} = \deg \ddagger\mathcal{L}^{\otimes N}$ という（ $\ddagger\mathcal{G}$ という“単一の設定”における、驚くべき）等式が得られるのです。そして、その“ある軽微な不定性”をきちんと考慮に入れますと、実際に帰結されるものは等式ではなく、“ $|\deg \mathcal{L}^{\otimes N}| \leq |\deg \mathcal{L}| + C$ ” という形の不等式となります。（この点について §10 の後半で少し補足します。）これにより、§4 での議論のようにして、 $|\deg \mathcal{L}|$ の何らかの上からの評価が得られるのです。

ちなみに、これまでの説明だけから考えますと、上で述べたミニチュア版の周辺の議論において、“ q_E ” と “ q_E^N ” の役割は置換可能となってしまいます。しかしながら、実際には、“ q_E ” と “ q_E^N ” の役割は置換不可能です。“ q_E^N ” は、その適切な修正版（もう少し具体的には、“テータ関数の特殊値としての q_E^N ” — この点については、§11 でもう少し説明をします）を採用することで、主定理に登場するような“剛性のある対象”として表現することが可能（別の言い方をすれば、“多輻的に表示することが可能”）です。一方、“ q_E ” をそのような“剛性のある対象”として表現することはできません。

9 対数リンク

§8 の後半で、宇宙際 Teichmüller 理論の主定理のミニチュア版を述べました。この §9 では、主定理のミニチュア版の内容からもその重要性が見て取れる“入れ物としての対数殻”について、§10 では、その続きとして、主定理のミニチュア版に登場した（そして、実際的主定理においてもやはり登場する）“ある軽微な不定性”の内容についての解説を行おうと思います。簡単のため、この §9 では、やはり $v \in \mathbb{V}(F)$ を有限素点とします。

まず最初に、§8 で行った次の議論を復習しましょう。そもそもコアの単解構造である $\mathcal{F}^{\times\mu}$ 素点縞から直ちに得られる加群は $\mathcal{I}_{G_v}^\times \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ などであり、それでは入れ物としては小さ過ぎます。（より正確には、このままではただの“単数的”な対象に過ぎないということです。）そこで、それらに対数写像を用いて加法的に解釈して対数殻 $\mathcal{I}_v \subseteq (\overline{F}_v)_+$ というより大きな対象と見做すことで、様々な重要な概念に対する適切な入れ物を得ました。一方、この構成には、正則構造に関わる次のような問題があります。その定義、すなわち、“ $a \mapsto -\sum_{n \geq 1} (1-a)^n / n$ ” という表示から簡単にわかるとおり、対数写像を考えるためには、その設定にお

る加法構造と乗法構造の両方、つまり、正則構造が必要となります。したがって、(抽象的な加群としての対数殻, すなわち

$$“\text{Im}(\mathcal{I}_{G_v}^{\kappa} \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})^{1/2p}”$$

そのものは確かに単解的でコア的ですが、しかしながら) 主定理に登場する “ q_E^N や F の入れ物としての対数殻”, すなわち

$$\mathcal{I}_v \stackrel{\text{def}}{=} (2p)^{-1} \cdot \text{Im}(\mathcal{I}_{G_v}^{\kappa} \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} \xrightarrow{p \text{ 進対数}} (\overline{F}_v)_+)$$

は、そのままでは単解的/コア的とは言い難い対象であり、正則構造と両立的でない安直リンクで直ちに結び付く対象ではないということです。

上の問題は、

対数写像は — したがって対数写像によって構成される対象は — 正則構造に依存してしまう

とまとめられると思います。正則構造に関するこの問題の回避の方法を説明するために、ここで、“対数リンク” という概念を導入します。 \mathcal{F} 素点縞 $\dagger\mathcal{F} = \{\dagger\mathcal{F}_v\}_{v \in \mathcal{V}(F)}$ が与えられているとして、その v 成分を $\dagger\mathcal{F}_v = (\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright})$ と書くことにしましょう。(したがって、 $\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ は “ $\Pi_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ ” の同型物です。) すると、 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ の可逆元全体のなす部分群 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \subseteq \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ の捻れ元全体のなす部分群 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\mu} \subseteq \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times}$ による商 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} / \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\mu}$ を考えることで、“ $\Pi_v \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ ” の同型物 $\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ を得ることができます。その上、遠アーベル幾何学の研究から、 $\dagger\Pi_v$ という位相群は“正則構造”であることが知られているため、特に、次の構成を行うことが可能です。つまり、この場合、 $\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ というデータから、アルゴリズム的に、 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ を “ $(\overline{F}_v)_+$ ” と解釈した後の体 “ \overline{F}_v ” の乗法構造を、すなわち、(下部集合は $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ であり、 $\dagger\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ の従来の演算が加法に対応する) 体 $\dagger\tilde{F}_v$ を復元/構成することができます。(したがって、 $\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\tilde{F}_v$ は “ $\Pi_v \curvearrowright \overline{F}_v$ ” の同型物です。) これにより、その非零整数による乗法モノイドを考えることで、新しい “ \mathcal{F} 素点縞の v 成分” $\log(\dagger\mathcal{F}_v) \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\tilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \dagger\tilde{F}_v \mid 0 < |a| \leq 1\})$ が得られます。(詳しくは、[12], Definition 1.1, (i), を参照ください。) (説明が省略されているその “無限素点版” — [12], Definition 1.1, (ii), を参照ください — も含めた) これらすべてを集めてできる新しい \mathcal{F} 素点縞を $\log(\dagger\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\log(\dagger\mathcal{F}_v)\}_v$ と書くことにします。さて、 $\dagger\mathcal{G}$ の 2 つの同型物 $\dagger^0\mathcal{G}$, $\dagger^1\mathcal{G}$ を用意しましょう。それぞれの \mathcal{F} 素点縞を $\dagger^0\mathcal{F}$, $\dagger^1\mathcal{F}$ と書いたとき、 \mathcal{F} 素点縞の間の同型 $\log(\dagger^0\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \dagger^1\mathcal{F}$ をその内容とする結び付き $\dagger^0\mathcal{G} \rightarrow \dagger^1\mathcal{G}$ を対数リンク (log-link — cf. [12], Definition 1.1, (iii)) と呼びます。対数リンク $\dagger^0\mathcal{G} \rightarrow \dagger^1\mathcal{G}$ とは、つまり、(有限素点においては)

$$\dagger^0\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \dagger^0\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \dagger^0\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} = \dagger^0\tilde{F}_v \supseteq \dagger^0\tilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \xrightarrow{\sim} \dagger^1\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$$

という関係のことだと考えられます。(ここで簡単な解説が与えられた対数リンクという概念の “Hodge 劇場版” は、§26 の最後で改めて定義されます。)

対数リンク $\dagger^0\mathcal{G} \rightarrow \dagger^1\mathcal{G}$ が与えられたとしましょう。すると、 $\dagger^1\mathcal{G}$ における $\dagger^1q_E^N \in \dagger^1\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ という元を、対数リンクによる同型で $\dagger^1q_E^N \in \dagger^0\tilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \subseteq \dagger^0\tilde{F}_v (= \dagger^0\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})$ と解釈することで、結果として、 $\dagger^1q_E^N \in \dagger^0\mathcal{I}_v (\subseteq (\dagger^0\tilde{F}_v)_+)$ という形で、対数殻の元と見做すことができます。このようにして、対数リンクを用いることで、“ q_E^N ” を対数殻の元と見做すことができる、つまり、対数リンクを用いることで、所望の形の入れ物を得ることができます。

さて、上述の問題に戻りましょう。問題の内容は、“対数写像による入れ物のこの構成は正則構造に依存してしまう” でした。主定理を得るためには、この “対数リンクを用いた入れ物の構成” が、何らかの意味で安直リ

リンクと両立的でなければなりません。その両立性を確認するためには、例えば、対数リンク自体が安直リンクと両立的になる、より具体的には、図式

$$\begin{array}{ccc} \dagger 1 \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{安直リンク}} & \dagger 1 \mathcal{G} \\ \text{log} \uparrow & & \uparrow \text{log} \\ \dagger 0 \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{安直リンク}} & \dagger 0 \mathcal{G} \end{array}$$

— ここで、図式の水平の射は安直リンク、図式の垂直の射は対数リンク — が可換することが確認できれば充分です。しかしながら、この図式は、簡単に確認できるとおり、可換ではありません。

上記の非可換性の帰結を回避するためにはどうすれば良いでしょうか。そのためには、同義反復的ですが、現在考察下の“対数リンクを用いて構成する入れ物”を、何らかの形で“対数リンクで不変な対象”と見做すことができれば充分です。対数リンクで不変な対象は、対数リンクと何らかの関連性を持ちながら、(対数リンクそのものとは違って) — コアの単解的对象を用いて表示することさえできれば — 安直リンクの向こう側に輸送することが可能になるからです。それでは、“対数リンクを用いて構成する入れ物”を、何らかの形で“対数リンクで不変な対象”にするためにはどうすれば良いでしょうか。そのために、以下のような考察を行います。対数リンクを“1回”だけ施して得られる関係

$$“\dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} = \dagger 0 \widetilde{F}_v \supseteq \dagger 0 \widetilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \xrightarrow{\sim} \dagger 1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}”$$

はもちろん対数リンクで不変ではありません。しかしながら、対数リンクの無限列

$$\dots \xrightarrow{\text{log}} \dagger -2 \mathcal{G} \xrightarrow{\text{log}} \dagger -1 \mathcal{G} \xrightarrow{\text{log}} \dagger 0 \mathcal{G} \xrightarrow{\text{log}} \dagger 1 \mathcal{G} \xrightarrow{\text{log}} \dagger 2 \mathcal{G} \xrightarrow{\text{log}} \dots$$

は、したがって、それによって生じる関係の無限列

$$\begin{array}{c} \dots \\ \dagger -1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \dagger -1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \dagger -1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \supseteq \dagger -1 \widetilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \\ \downarrow \wr \\ \dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \dagger 0 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \supseteq \dagger 0 \widetilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \\ \downarrow \wr \\ \dagger 1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \dagger 1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \dagger 1 \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \supseteq \dagger 1 \widetilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \\ \dots \end{array}$$

は同義反復的に対数リンク不変です。(このような現象のより初等的な例として、“ \mathbb{Z} の任意の元 $n \in \mathbb{Z}$ は“+1”という操作で不変ではないが、 \mathbb{Z} 全体は“+1”という操作で不変”という現象が挙げられると思います。)したがって、単一の“ \mathcal{I}_v ”を入れ物として使用するのではなく、上の関係の無限列から生じる対数殻たち全体

$$\dots \xrightarrow{\text{対数}} \dagger -1 \mathcal{I}_v \supseteq \dagger 0 \mathcal{O}_{F_v}^{\times} \xrightarrow{\text{対数}} \dagger 0 \mathcal{I}_v \supseteq \dagger 1 \mathcal{O}_{F_v}^{\times} \xrightarrow{\text{対数}} \dagger 1 \mathcal{I}_v \supseteq \dagger 2 \mathcal{O}_{F_v}^{\times} \xrightarrow{\text{対数}} \dots$$

を“入れ物”として使用すれば、上で述べた非可換性の問題が解消されるということなのです。

最後に、対数殻の無限列を“入れ物”として用いる際の注意を述べます。

まず最初に、“体積”に関する注意です。§8でも言及したとおり、“入れ物”としての対数殻の重要な性質として、関連する様々な対象の体積（つまり、局所的次数）が計算可能であるという事実があります。したがって、上記のような対数殻の無限列において、ある $n \in \mathbb{Z}$ での体積と別の $m \in \mathbb{Z}$ での体積が両立的でなかったとしますと、主定理のための“入れ物”としてはふさわしくありません。では実際にはどのようになっているのでしょうか。実は、それぞれの段階での体積は無限列において両立的です。これは、“対数写像 $\log_v: \mathcal{O}_{F_v}^\times \rightarrow (F_v)_+$ とコンパクト部分集合 $A \subseteq \mathcal{O}_{F_v}^\times$ に対して、もしも自然な全射 $A \rightarrow \log_v(A)$ が全単射ならば、 A と $\log_v(A)$ の体積は等しい”という良く知られた事実の帰結です。（[12], Proposition 1.2, (iii), を参照ください。）

次に、“入れ物”に入れられる対象の“干渉性”についてです。§8で観察したとおり、これまで議論してきた対数殻は“ q_E^N ”や“ F ”といった対象の“入れ物”として使用されます。したがって、上記のような対数殻の無限列の使用によって、ある $n \in \mathbb{Z}$ での“ q_E^N ”や“ F ”が他の局所的な元と“干渉”してしまうような状況が引き起こされますと、アルゴリズムの出力に混乱が生じてしまいます。では実際にはどのようになっているのでしょうか。実は、そのような干渉は起こりません。“ q_E^N ”の場合には、§15で説明する“単データ環境の定数倍剛性”と呼ばれる剛性性質によって、“ q_E^N ”に関わる対数写像適用可能範囲”は高々1の巾根のなす群となることがわかり、“1の巾根の対数写像による像は0”という事実から、その干渉性がわかります。（[12], Proposition 3.5, (ii), を参照ください。）また“ F ”の場合には、“ F ”に関わる対数写像適用可能範囲”はもちろん $F \cap \bigcap_{v \in \mathbb{V}(F)} \overline{\mathcal{O}}_v^\times$, つまり、 F の中の1の巾根のなす群ですので、やはり“1の巾根の対数写像による像は0”という事実から、その干渉性がわかります。（[12], Proposition 3.10, (ii), を参照ください。）

10 軽微な不定性

§9の冒頭で述べたとおり、この§10では、主定理のミニチュア版（§8を参照）に登場した（そして、実際の主定理においてもやはり登場する）“ある軽微な不定性”の内容についての解説を行おうと思います。ここでも、簡単のため、 $v \in \mathbb{V}(F)$ を有限素点とします。

この“ある軽微な不定性”は3つの部分からなります。1つ目は、 G_v の位相群としての自己同型から生じる出力データの不定性です。§6で述べましたが、 G_v をコアの対象と見做す際、 G_v を抽象的な位相群として扱わなければいけません。したがって、安直リンクの左側と右側の“ G_v ”には本来的には何の関連もありませんので、これらを同一視する際、それらの間の充満多重同型を考える必要があります。そして、その結果、 G_v には、その自己同型全体が不定性として作用することになります。この局所的なGalois群に対する不定性によって生じる主定理のアルゴリズムの出力に作用する不定性が、“ある軽微な不定性”の第1部分（Ind₁）です。

2つ目は、対数殻を単遠アーベル幾何学を用いて輸送する際のKummer同型に付加される不定性です。§3で説明した例と同様に、対数殻の単遠アーベル幾何学を用いた輸送を実行するためには、Frobenius的対数殻（つまり、この場合、 $\mathcal{F}^{\times \mu}$ 素点縞のFrobenius的部分“($\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}; H \mapsto \mathcal{I}_H^\kappa \subseteq (\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu})^H$)”から直接的に構成された対数殻）とエタールの対数殻（つまり、この場合、 $\mathcal{F}^{\times \mu}$ 素点縞のエタールの部分“ G_v ”から単遠アーベル幾何学的に構成された対数殻）をKummer同型で結び付けなければいけません。その際、このKummer同型には、

$$\text{Ism} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \times \mu\text{-Kummer 構造や } G_v \text{ の作用と両立的な } \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \text{ の自己同型 } \}$$

という群（[11], Example 1.8, (iv), を参照ください）が誘導する対数殻の自己同型が不定性として付加されてしまいます。（[12], Proposition 1.2, (vi), (vii), (viii), を参照ください。）これが“ある軽微な不定性”の第2部分（Ind₂）です。

§3 の後半で導入した用語を用いますと、1 つ目の不定性はエタール輸送不定性で、2 つ目の不定性は Kummer 離脱不定性です:

$$\begin{array}{ccccc}
 \dagger\text{Frobenius 的对数殻} & \xrightarrow{\text{(Ind}_2\text{): Ism}\curvearrowright} & \dagger\text{エタールの对数殻} & & \\
 & \xrightarrow{\text{(Ind}_1\text{): Aut}(G_v)\curvearrowright} & \ddagger\text{エタールの对数殻} & \xrightarrow{\text{(Ind}_2\text{): Ism}\curvearrowright} & \ddagger\text{Frobenius 的对数殻.}
 \end{array}$$

3 つ目の不定性 (Ind₃) は (§9 で説明した) “様々な対象の入れ物である対数殻” に関する不定性であり、§3 の後半で導入した用語を用いますと、Kummer 離脱不定性になります。§9 で説明した対数リンクは、その定義から簡単に確認できるとおり、 \mathcal{D} 素点縞を、したがって、 \mathcal{D}^\dagger 素点縞をそのコアの対象とします。(つまり、簡単に言ってしまうと、対数リンク $\log(\dagger^0\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \dagger^1\mathcal{G}$ は位相群の同型 $\dagger^0\Pi_v \xrightarrow{\sim} \dagger^1\Pi_v$ を、特に、位相群の同型 $\dagger^0G_v \xrightarrow{\sim} \dagger^1G_v$ を導くということです。) この事実により、§9 で考察した対数リンクの無限列

$$\dots \xrightarrow{\log} \dagger^{-2}\mathcal{G} \xrightarrow{\log} \dagger^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\log} \dagger^0\mathcal{G} \xrightarrow{\log} \dagger^1\mathcal{G} \xrightarrow{\log} \dagger^2\mathcal{G} \xrightarrow{\log} \dots$$

が与えられると、 \mathcal{D} 素点縞や (その下の) \mathcal{D}^\dagger 素点縞の同型の無限列

$$\begin{array}{l}
 \dots \xrightarrow{\sim} \dagger^{-2}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \dagger^{-1}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \dagger^0\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \dagger^1\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \dagger^2\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \dots \\
 \dots \xrightarrow{\sim} \dagger^{-2}\mathcal{D}^\dagger \xrightarrow{\sim} \dagger^{-1}\mathcal{D}^\dagger \xrightarrow{\sim} \dagger^0\mathcal{D}^\dagger \xrightarrow{\sim} \dagger^1\mathcal{D}^\dagger \xrightarrow{\sim} \dagger^2\mathcal{D}^\dagger \xrightarrow{\sim} \dots
 \end{array}$$

が得られます。これら同型を用いて各 \mathcal{D} 素点縞、 \mathcal{D}^\dagger 素点縞を同一視することによって得られる \mathcal{D} 素点縞、 \mathcal{D}^\dagger 素点縞をそれぞれ $\dagger^0\mathcal{D}$ 、 $\dagger^0\mathcal{D}^\dagger$ と書くことにしましょう。このとき、§6 での議論のとおり、この \mathcal{D}^\dagger 素点縞 $\dagger^0\mathcal{D}^\dagger$ は $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる結び付きのコアの対象となります。そして、主定理を得るために、“入れ物” のこの $\dagger^0\mathcal{D}^\dagger$ を用いた単遠アーベル幾何学的輸送を行うこととなります。その際、§9 で行った議論の帰結として、単一の $n \in \mathbb{Z}$ に対する Kummer 同型 $\dagger^n\mathcal{I}_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger^0\mathcal{D}_v}$ — ここで、 $\dagger^n\mathcal{I}_v$ は $n \in \mathbb{Z}$ での Frobenius 的对数殻、 $\mathcal{I}_{\dagger^0\mathcal{D}}$ は $\dagger^0\mathcal{D}$ の v 成分 $\dagger^0\mathcal{D}_v$ から構成された (エタールの) 対数殻 — のみを考えるのではなく、“すべての $n \in \mathbb{Z}$ にわたる Kummer 同型 $\dagger^n\mathcal{I}_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger^0\mathcal{D}_v}$ と

$$\dots \xrightarrow{\text{对数}} \dagger^{-1}\mathcal{I}_v \supseteq \dagger^0\mathcal{O}_{F_v}^\times \xrightarrow{\text{对数}} \dagger^0\mathcal{I}_v \supseteq \dagger^1\mathcal{O}_{F_v}^\times \xrightarrow{\text{对数}} \dagger^1\mathcal{I}_v \supseteq \dagger^2\mathcal{O}_{F_v}^\times \xrightarrow{\text{对数}} \dots$$

という $\dagger^n\mathcal{I}_v$ たちの関係の総体”

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\text{对数}} & \dagger^{-2}\mathcal{I}_v & \xrightarrow{\text{对数}} & \dagger^{-1}\mathcal{I}_v & \xrightarrow{\text{对数}} & \dagger^0\mathcal{I}_v & \xrightarrow{\text{对数}} & \dagger^1\mathcal{I}_v & \xrightarrow{\text{对数}} & \dagger^2\mathcal{I}_v & \xrightarrow{\text{对数}} & \dots \\
 & & \wr \downarrow \text{Kmm} & & \\
 \dots & = & \mathcal{I}_{\dagger^0\mathcal{D}_v} & = & \dots
 \end{array}$$

を考えなければなりません。これは 対数 Kummer 対応 (log-Kummer correspondence — cf., e.g., [12], Introduction, Remark 3.12.2) と呼ばれます。対数 Kummer 対応の各 Kummer 同型 $\dagger^n\mathcal{I}_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\dagger^0\mathcal{D}_v}$ は、当然 $n \in \mathbb{Z}$ の変更に関して両立的ではありません。しかし、一方、それらは、上記の対数殻の関係の無限列が示す 上半両立性 (upper semi-compatibility — cf., e.g., [12], Proposition 3.5, (ii)) を満たします。そして、“対数 Kummer 対応が上半両立性を満たすことしか確認することができない” という事実によって考慮しなければならない不定性が、考察下の Kummer 同型に付加されることとなります。これが 3 つ目の不定性 (Ind₃) の内容です。

§9 での議論, 及び, それに関連する “3 つ目の不定性” に関するこれまでの議論をまとめると, 以下のようになります:

- 単解的整構造 $\mathcal{I}_v (\subseteq \mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ を “入れ物” として用いたいが, “対数写像は正則構造に依存する” という理由から, 正則構造と両立しないリンクによってそのような “入れ物” を両立させることはできない. つまり, $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる結び付きと対数リンクの非可換性から, 単一の対数リンクによる “入れ物としての対数殻” は, $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる結び付きと両立的でない.

- $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる結び付きと対数リンクの非可換性を同義反復的に解消するために, 対数リンクの無限列を考えて, それによって生じる対数殻たち全体を “入れ物” として利用する.

- そのような対数殻たち全体を “入れ物” として利用するためには, 単遠アーベル幾何学的輸送の際, 単一の Kummer 同型を考えるのではなく, 対数 Kummer 対応を考えなければならない. その対数 Kummer 対応が上半両立性しか満たすことしか確認できないという事実により生じる不定性が, 3 つ目の不定性 (Ind₃) である.

対数 Kummer 対応が (完全な両立性ではなく) 上半両立性を満たすことしか確認できませんので, 主定理のミニチュア版に登場した “入れ物としての対数殻” は (したがって, それに入れられる対象から構成される対象たちも) “等式” という “両側からの評価” ではなく, “不等式” という “片側からの評価” の対象になります. これが, 主定理による最終的な帰結が等式ではなく不等式となる原因になります.

最後に, 数論的直線束を定義するために必要である正則的整構造 “ $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ ” を議論の中心として, この §10 で行った “ある軽微な不定性” に関する議論をまとめましょう. 正則的整構造 “ $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ ” の “共有” を実行するためにどのようにその剛性を放棄しなければならないか, という観点から我々の議論をまとめますと, 以下のようになります:

数論的直線束を定義するための局所的加群である正則的整構造 $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ を, 安直リンクで共有したい.

$(\text{Ind}_3) \curvearrowright$
 \Rightarrow $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ は正則的な対象であるが, 一方, 安直リンクは正則構造と両立しない. この事実から, $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ 自体の共有は諦めて, その代替物として, $(\mathcal{O}_{F_v})_+$ より少し大きい (正則的な設定における) 対数シェル $((\mathcal{O}_{F_v})_+ \subseteq) \mathcal{I}_v \subseteq (\tilde{F}_v)_+ \curvearrowright G_v$ を, 安直リンクで共有したい.

$(\text{Ind}_3) \curvearrowright$
 \Rightarrow 安直リンクは加法構造との相性が良くないため, 加法的な対象 $(\tilde{F}_v)_+$ を乗法的な対象 $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}$ と解釈することで得られる $(\mathcal{I}_{G_v}^{\kappa})^{1/2p} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \curvearrowright G_v$ を, 安直リンクで共有したい.

$(\text{Ind}_2) \curvearrowright$
 \Rightarrow 安直リンクは正則構造と両立しないため, 正則構造から離脱するために, $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}$ を抽象的な ($\times \mu$ -Kummer 構造付き) モノイド “ M ” と見做すことで得られる $M (\cong \overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}) \curvearrowright G_v$ を, 安直リンクで共有したい.

$(\text{Ind}_1) \curvearrowright$
 \Rightarrow 安直リンクは正則構造と両立しないため, 正則構造から離脱するために, Galois 群を抽象的な位相群 “ G ” と見做すことで得られる $M \curvearrowright G (\cong G_v)$ を, 安直リンクで共有したい.

最後の “ $M \curvearrowright G$ ” は $\mathcal{F}^{\times \mu}$ 素点編 (の v 成分) に他なりません. したがって, §6 で説明したとおり, 安直リンクのコアの対象 — すなわち, 共有可能対象 — です. つまり, 上述の様々な “剛性の放棄” により, 安直リンクによる共有が可能となるのです.

11 数から関数へ

§8 の最後で,

“ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ ” なる適当な結び付きと両立するような, 対数殻 “ \mathcal{L}_v ”, ある数論的直線束の生成元 “ q_E^N ”, 数体 “ F ” という 3 つの対象の (ある適切な設定における) 多輻的な表示の存在

から, Diophantus 幾何学におけるある非自明な不等式が導かれることを確認しました. この §11 では, その多輻的な表示をどのように実現するのか, という問への回答の最初の一步についての説明を行います. 対数殻の多輻的な表示については, §9 や §10 で既に若干の説明を与えましたので, 特に, ここでは,

ある数論的直線束の生成元 “ q_E^N ” と数体 “ F ” の多輻的な表示

について議論しましょう.

まず最初に, いきなり困った, しかしある意味で当たり前な主張である,

“ただの数” としての “ q_E^N ” や “ F の元” をそのままの形で多輻的に, しかも, $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる結び付きと両立するように表示することは非常に困難である

ということが, 例えば以下の議論からわかります. これまで何度も言及しているとおり, 結び付き “ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ ” は, 本質的に正則構造から離脱しなければ実現することはできません. 問題の結び付きを考察するためには, 正則構造から単解構造への移行が必須となるのです. 一方, その “正則構造から単解構造への移行” は, 考察下のいろいろな “数の集まり” に, (§10 で議論した “軽微” なそれよりも) 大きな (我々の結論に対して) 害のある様々な不定性を誘導します. 簡単な例として, 例えば, 有理整数環 \mathbb{Z} に関する剛性を考えてみましょう. 環としての \mathbb{Z} の自己同型は恒等写像しか存在せず, つまり, 環としての \mathbb{Z} は非常に強い剛性を持つ対象です. 一方, その単解構造, すなわち, 例えば, 下部乗法モノイド \mathbb{Z}_\times や下部加法加群 \mathbb{Z}_+ は, その自己同型全体が非自明 — 前者は無限群, 後者は $\{\pm 1\}$ — となり弱い剛性しか持ち得ません. このように, 単解構造への移行は, 一般に, 様々な “数の集まり” から (そもそも正則構造によって保証されていた) 剛性を奪います:

$$\text{正則構造: } \mathbb{Z} \curvearrowright \{1\} \rightsquigarrow \text{単解構造: } \mathbb{Z}_\times \curvearrowright \text{無限群, } \mathbb{Z}_+ \curvearrowright \{\pm 1\}.$$

一方, “ q_E^N ” や “ F の元” をそのまま “数” として扱う, ということは, これらをその様々な不定性に曝すということに他なりません. 我々の目標である “ $\dagger q_E^N \mapsto \ddagger q_E$ なる変形と両立的な多輻的な表示” とは, 大雑把には, “この変形に引きずられない表示” のことです. (あるいは, 別の言い方をすれば, “この変形の両辺に対して同時実行可能な表示” となるでしょう.) 単解構造への移行に伴う上述のような大きな不定性に影響を受けない “数” としての “ q_E^N ” や “ F の元” の表示を与えるということは, すなわち, “ q_E^N ” や “ F の元” を “(大きな/害のある) 不定性に曝された対象” であると同時に “(大きな/害のある) 不定性に影響を受けない対象” とも見做すということですから, その実現が困難であることは, 容易に想像できると思います. 上述の有理整数環の例の場合, 例えば, 当たり前ですが, \mathbb{Z} の $7 \in \mathbb{Z}$ という元は, 正則構造のもとでは “定義可能” です. (例えば, 乗法の単位元 — つまり $1 \in \mathbb{Z}$ — を 7 個足し合わせた和として定義できます.) 一方, 単解構造 \mathbb{Z}_\times に移行しますと, \mathbb{Z}_\times の持つ対称性によって, “ $7 \in \mathbb{Z}_\times$ ” は “定義可能” でなくなり, (簡単に確認できるとおり) 少なくとも “± 素数という形をした元であることしか確認できない” という “不定性” のもとで扱わなければならないとなります. つまり, 正則構造から単解構造に移行することで失われた剛性によって, “7” という “数” が

“定義不可能”になるのです。

では、どのようにして、所望の多輻的な表示を実現すれば良いのでしょうか。上の議論での表現を用いれば、単解構造への移行によって生じる“数の集まり”への大きな不定性から、どのようにして“ q_E^N ”や“ F の元”を守れば良いのでしょうか。結論を述べてしまいますと、その多輻的な表示の実現のために、我々は、設定における“幾何学的な次元”を活用します。“ q_E^N ”や“ F の元”をそのまま“数”として扱うのではなく“関数化”するのです。つまり、

まず最初に“ q_E^N ”や“ F の元”をその特殊値とするような適切な双曲的曲線や双曲的軌道曲線 (orbicurve — cf. [5], Definition 2.2, (i)) 上の関数たちの多輻的な表示を与えて、理論の最後の段階でその関数の特殊値たちを取り出すことで、結果的に、“ q_E^N ”や“ F の元”を多輻的に表示する

という方法を採用します。別の表現を用いますと、

“ q_E^N ”や“ F の元”を一旦“関数”という“幾何学的な箱”に閉じ込めて、大きな不定性から防護/隔離する

ということです。

この“関数を用いて数を不定性から防護する”という議論の簡単な例を観察しましょう。有理数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ 、及び、その関数体 $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ を考えます。すると、簡単にわかるとおり、以下の完全系列が存在します：

$$1 \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}(t)^\times \xrightarrow{\bigoplus_{a \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1} \text{ord}_a} \bigoplus_{a \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1} \mathbb{Z}$$

— ここで、 ord_a は“ a での位数”を考えることによって得られる射。この代数幾何学的設定を“モデル”として、この例では、(抽象的な群としての) $\overline{\mathbb{Q}}(t)^\times$ の同型物 M と(やはり抽象的な群としての) $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ の同型物 A について考察します。ここで、それらに対して、何らかの理由 — 例えば、この設定に到達するまでに適用可能な何らかの遠アーベル幾何学的な議論 — によって、

(*)：各有理関数の各点での位数 — つまり、各 $a \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ に対する $\text{ord}_a: \overline{\mathbb{Q}}(t)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ の同型物 $o_a: M \rightarrow \mathbb{Z}$ — や $2 \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ での値 — つまり、 $\text{ev}_2: \text{Ker}(\text{ord}_2) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$; $\text{ev}_2(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(2)$ の同型物 $e_2: \text{Ker}(o_2) \rightarrow A$

を知っている/が与えられていると仮定しましょう。(この仮定は、この例において、下の議論の (a) を導くための仮定となります。) また、その上、

(**): 各有理関数の $14 \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ での値 — つまり、 $\text{ev}_{14}: \text{Ker}(\text{ord}_{14}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$; $\text{ev}_{14}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(14)$ の同型物 $e_{14}: \text{Ker}(o_{14}) \rightarrow A$

を知っている/が与えられていると仮定しましょう。(この仮定は、この例において、下の議論の (b) の条件に相当する仮定になります。) ここで強調したい事実は、我々は単解構造である(つまり、抽象的な群としての) $\overline{\mathbb{Q}}(t)^\times$ や $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ の同型物を扱っており、そして、(*) や (**) という条件は、“代入”に関する条件が含まれているので、定数部分と無関係ではありませんが、少なくとも)

“定数部分を正則構造由来の何らかの剛性によって剛化する”という類の仮定ではない、

ということです。したがって、定数部分 “ $\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” にはやはり大きな不定性が生じるため、(例えばさきほどと同様の) “ $7 \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” が “定義可能” であるかどうか — 別の言い方をすれば, “ $7 \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” という元のこの設定における “強い剛性を持つ表示” が存在するかどうかは — 少なくとも直ちにはわからないと思います。ここで、先述の

“関数” という “幾何学的な箱” による大きな不定性からの防護/隔離

を実演してみましょう。(“モデル” における意味を考えることで) 射影直線に関わる簡単な代数幾何学より、以下の性質を満たす元 $\phi \in M$ がただ 1 つ存在することがわかります:

$$a \notin \{0, \infty\} \text{ ならば } \phi \in \text{Ker}(o_a) \text{ であり, その上, } o_0(\phi) = 1, o_{\infty}(\phi) = -1. \text{ そして, } e_2(\phi) = 1.$$

ϕ を規定するための定数部分に関連する条件は “ $e_2(\phi) = 1$ ” のみです。さきほど述べたとおり、定数部分 “ $\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” には大きな不定性が生じていると考えられるのですが、一方、この “ $1 (= e_2(\phi))$ ” は (定数部分に属す元であるにも関わらず) “単位元” なので、純群論的設定においても剛性を持つことに注意しましょう。この $\phi \in M$ が “ $7 \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” に対する “幾何学的な箱” となっています。実際、2 番目の仮定 (**) で与えられている e_{14} による ϕ の像 $e_{14}(\phi) \in A$ が “ $7 \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” に対応する元に他ならないことは (ϕ の “モデル” における意味を考えることで) 簡単に確認できると思います。このように、関数 “ ϕ ” を経由することで、“ $7 \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ” に対応する “数” の表示 “ $e_{14}(\phi) \in A$ ” を得ることができました。

上で説明したような関数、つまり、我々の目標を達成するための “ q_E^N ” や “ F の元” に対する “幾何学的な箱” は、もちろん何でも良いわけではありません。まず最初に、そういった関数の多輻的な表示を与えるために、少なくとも、

(a) その関数 (の Kummer 類) が遠アーベル幾何学的に強い剛性性質を持つ、特に、遠アーベル幾何学的に復元可能

でなければなりません。また、最終的にはその関数自体ではなく、その関数の特殊値に関心があるわけですから、少なくとも、

(b) その関数が定義される (軌道) 曲線の “その関数の所望の特殊値を与える点” (の分解群) が遠アーベル幾何学的に復元可能

でなければなりません。そして、そういった特殊値に対して単遠アーベル幾何学的輸送を適用しなければならないため、少なくとも、

(c) その関数に関わる設定において、何らかの円分剛性が存在する

必要があります。

そのような、すなわち、“幾何学的な箱” の役割を果たす関数として、宇宙際 Teichmüller 理論では、“ q_E^N ” に対して テータ関数、“ F の元” に対して κ コアの (κ -coric — cf. [10], Remark 3.1.7, (i)), $\infty\kappa$ コアの ($\infty\kappa$ -coric — cf. [10], Remark 3.1.7, (ii)), $\infty\kappa\times$ コアの ($\infty\kappa\times$ -coric — cf. [10], Remark 3.1.7, (ii)) 関数という “ κ 系” の特殊な有理関数を採用しています。(それぞれ §13, §24 において、テータ関数、“ κ 系” 有理関数のもう少し詳しい説明が与えられます。) これら関数の多輻的な表示を経由することで、最終的な主定理に登場する多輻的な表示を実現します。

12 主定理の大雑把版

§8 で宇宙際 Teichmüller 理論の主定理のミニチュア版を述べました。そして、§9 から §11 で行った議論によって、そのミニチュア版よりもう少し本当の主定理に近い“宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版”の形が明らかになりました。ここで、その大雑把版を述べましょう。(実際的主定理については、[12], Theorem 3.11, を参照ください。)

宇宙際 Teichmüller 理論の主定理の大雑把版: “ E/F ” を “充分一般的” であると仮定する。また、 \mathfrak{R} を以下のデータからなる 3 つ組とする:

- 対数殻 $\{\mathcal{I}_v\}_{v \in \mathbb{V}(F)}$.
- テータ値 — つまり, “テータ関数の特殊値” — $(= (q_E^{j^2/2l})_{j=1, \dots, (l-1)/2})$ とその対数殻への作用 $\curvearrowright \prod_{v \in \mathbb{V}(F)} \mathcal{I}_v$.
- κ コア的関数による数体とその対数殻への作用 $\curvearrowright \prod_{v \in \mathbb{V}(F)} (\mathcal{I}_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

このとき、以下が成立する:

(i) (多輻的表示) 考察下の設定の対数リンクによる無限列

$$\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-2}\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_{-1}\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_0\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_1\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_2\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dots$$

に対して、 (Ind_1) のもと、この無限列のコア的エタールの部分から上記 3 つ組 $\dagger_0\mathfrak{R}$ を (\mathcal{D}^+ 素点縞をコア的対象とする適当な輻的環境のもとで) 多輻的に構成する単遠アーベル幾何学的アルゴリズムが存在する。

(ii) (対数 Kummer 対応) 考察下の設定の対数リンクによる無限列

$$\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-2}\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_{-1}\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_0\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_1\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dagger_2\mathfrak{G} \xrightarrow{\log} \dots$$

に対して、(i) の $\dagger_0\mathfrak{R}$ と $n \in \mathbb{Z}$ での Frobenius 的上記 3 つ組 $\dagger_n\mathfrak{R}$ との間に、 (Ind_2) のもとでの Kummer 同型 $\dagger_n\mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \dagger_0\mathfrak{R}$ が存在する。また、この Kummer 同型は、 (Ind_3) のもと、 n の変更に関して両立的。

(iii) (Θ リンク両立性) 考察下の設定による図式

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\log} & \dagger_{-2}\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dagger_{-1}\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dagger_0\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dagger_1\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dagger_2\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dots \\ & & & & & & \Theta \downarrow & & & & & & \\ \dots & \xrightarrow{\log} & \ddagger_{-2}\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \ddagger_{-1}\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \ddagger_0\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \ddagger_1\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \ddagger_2\mathfrak{G} & \xrightarrow{\log} & \dots \end{array}$$

— ここで、水平の矢は対数リンク、垂直の矢は Θ リンクと呼ばれるリンクであり、その一部は

- $\dagger_0\mathcal{F}^{\dagger \times \mu}$ 素点縞 $\xrightarrow{\sim} \ddagger_0\mathcal{F}^{\dagger \times \mu}$ 素点縞,
- \dagger_0 テータ値 $(= (\dagger_0 q_E^{j^2/2l})_{j=1, \dots, (l-1)/2}) \mapsto \ddagger_0 q_E$,
- “ \dagger_0 テータ値 $\mapsto \ddagger_0 q_E$ ” による

\dagger_0 乗法的/値群的理解による数論的直線のなす圏 (の実化)

$\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^0$ 乗法的/値群的理解による数論的直線のなす圏 (の実化)

というデータ — に対して, (i) と (ii) による同型 $\mathbb{Z}^0 \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^0 \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^0 \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^0 \mathfrak{A}$ は Θ リンクと両立的.

§6 で行った議論のとおり, (iii) に登場する Θ リンク (つまり, 安直リンクのある進化版) において, やはり $\mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点編はコアの対象となっています. ((iii) の “ $\mathbb{Z}^0 \mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点編 $\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^0 \mathcal{F}^{+\times\mu}$ 素点編” を参照.) また, 宇宙際 Teichmüller 理論では, 対数リンクは上向きの垂直の矢, Θ リンクは右向きの水平の矢で記されることが多く, その “標準的記法” に合わせようとするならば, (iii) における図式を反時計回りに 90 度回転させなければなりません.

これまで強調していませんでしたが, 上の大雑把版の冒頭で注意されているとおり, 実は, 宇宙際 Teichmüller 理論の主定理は, 任意の “§4 で導入したような E/F ” に対する定理ではなく, ある特別な (しかし “充分一般的” な) “ E/F ” に対する定理です. もう少し具体的には, §17 で説明が与えられる “初期 Θ データ” と呼ばれる概念の一部となり得る “ E/F ” に対する定理となっています.

§11 での議論のとおり, ある意味において, この理論の主役は, テータ関数, 及び, “ κ 系” の特殊な有理関数たちです. “宇宙際 Teichmüller 理論の主定理” (とその後の議論) をこれら関数から眺めると, それは, 非常に大雑把には, 以下のようにまとめられると思います:

- 考察下の設定に属する既存の/Frobenius 的なテータ関数や “ κ 系” の特殊な有理関数たちを, 適切な Kummer 同型 — すなわち, 適切な円分剛性のアルゴリズム — を用いて 多輻的 にエタールのに表示する.

- 上で得られた多輻的エタールのテータ関数や多輻的エタールの “ κ 系” 有理関数たちに, 適切な代入点における Galois 代入 (Galois evaluation — cf., e.g., [11], Remarks 1.12.4, 3.6.2) — 簡単に説明してしまえば, 考察下の関数の Kummer 類を, 代入したい点の分解群に制限することで, 所望の代入値を遠アーベル幾何学的に得る操作のことで — を適用することで, ((Ind₁), (Ind₂), (Ind₃)) といった不定性が付加された) 対数殻に属する所望の特殊値を構成する.

- 不定性付き対数殻とその中に構成された多輻的エタールのテータ関数の特殊値によって, “加群的”/“次数計算可能” な (つまり, §8 に登場した “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ ” のような圏の対象としての) “テータ値による数論的直線束” が構成される.

- 不定性付き対数殻とその中に構成された多輻的エタールの “ κ 系” 有理関数たちの特殊値による数体の体構造によって, 上に登場するような “加群的”/“次数計算可能” な数論的直線束のなす圏 (つまり, §8 に登場した “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ ” のような圏) が, “必ずしも正則構造とは両立しない結び付きに対する両立性を持つ数論的直線束の圏” (つまり, §8 に登場した “ $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^{\otimes}$ ” のような圏) と結び付く.

- これにより, 上で構成された “テータ値による数論的直線束” は, (対数殻に付加された不定性のもと) “次数計算可能”, かつ, “必ずしも正則構造とは両立しない結び付きに対しても両立的” となる.

さて, これまでその説明を行ってきた主定理から, 以下のような議論によって, 我々の目標であった

$|\text{deg } \mathcal{L}|$ の何らかの上からの評価

を得ることができます. (詳しくは, [12], Corollary 3.12, の証明を参照ください.) (iii) で議論されている図式を出発点としましょう. ここで, 用語の導入ですが, q パラメータ q_E によって定義される数論的直線束 (つまり “ \mathcal{L} ”) (に対応する数論的直線束のなす適当な圏の対象) を q 標対象 (q -pilot object — cf. [12], Definition 3.8, (i)) と呼びます. ([12], Remark 3.12.1, (ii), も参照ください.) また, テータ値 $(= (q_E^{j^2/2l})_{j=1, \dots, (l-1)/2})$ によって定義される数論的直線束 (つまり, これまでの我々の議論において, “ $\mathcal{L}^{\otimes N}$ ” の役割を果たす数論的直線束) (に対応する数論的直線束のなす適当な圏の対象) を Θ 標対象 (Θ -pilot object — cf. [12], Definition 3.8, (i)) と呼びます. この用語を用いて, 上述の我々の目標を改めて述べれば, それは,

$$|\deg(q \text{ 標対象})| \text{ の何らかの上からの評価}$$

となります.

まず最初に, Θ リンクによって, “ \dagger 側” の Θ 標対象は “ \ddagger 側” の q 標対象と対応することになります:

$$\dagger \Theta \text{ 標対象} \longleftrightarrow \ddagger q \text{ 標対象}.$$

また, 主定理のアルゴリズムによって, $(\text{Ind}_1), (\text{Ind}_2), (\text{Ind}_3)$ のもと, “ \dagger 側” の Θ 標対象は “ \ddagger 側” の Θ 標対象と対応することになります:

$$\dagger \Theta \text{ 標対象} \xrightarrow{(\text{Ind}_{1,2,3})^\sim} \ddagger \Theta \text{ 標対象}.$$

したがって, これら 2 つの対応を併せることで, 結論として, “ \ddagger 側” の q 標対象が同じく “ \dagger 側” の Θ 標対象の “ $(\text{Ind}_1), (\text{Ind}_2), (\text{Ind}_3)$ による軌道の和集合” (の, 厳密には, 正則包 (holomorphic hull — cf. [12], Remark 3.9.5)) に含まれることとなります:

$$\ddagger q \text{ 標対象} \subseteq \left(\bigcup_{(\text{Ind}_{1,2,3})} \ddagger \Theta \text{ 標対象} \right) \text{ の正則包}.$$

つまり, q 標対象の体積は, Θ 標対象の “ $(\text{Ind}_1), (\text{Ind}_2), (\text{Ind}_3)$ による軌道の和集合” (の, 厳密には, 正則包) の体積以下であるという結論が得られました:

$$|\deg(q \text{ 標対象})| (= -\deg(q \text{ 標対象})) \geq -\text{vol}(\Theta \text{ 標対象の不定性による軌道の和集合の正則包}).$$

これにより, 我々の目標であった “ $|\deg \mathcal{L}| \geq |\deg \mathcal{L}^{\otimes N}| - C$ ” というタイプの不等式 — §4 の前半の議論を参照 — を得ることができました.

本稿ではこれ以上説明しませんが, “上述の不等式

$$|\deg(q \text{ 標対象})| \geq -\text{vol}(\Theta \text{ 標対象の不定性による軌道の和集合の正則包})$$

が実際にどのような不等式を導くのか”, 及び, “(上述の大雑把版の冒頭で述べた意味での) “一般的ではない E/F ” も含めて, 最終的にすべてはどのように処理されるのか” という問題の解決が, 大雑把には, [13] のそれぞれ §1, §2 での議論の目的となっています.

13 様々な被覆とテータ関数

§11 の最後の部分で, 宇宙際 Teichmüller 理論では, “ q_E^N ” を様々な不定性から防護/隔離する関数として, テータ関数という関数を採用していると述べました. 宇宙際 Teichmüller 理論では, テータ関数を記述する設定として, “単テータ環境” という概念を用います. この §13 では, §14 や §15 で行われる単テータ環境の解説

の準備として、一点抜き楕円曲線に関わる様々な曲線やその上の有理関数であるテータ関数を簡単に紹介します。(この §13 の内容について、詳しくは、[7] の §1 や §2 を参照ください。)

単テータ環境の理論は非 Archimedes 的局所的な理論です。§2 の冒頭と同様に、 p を素数、 k を p 進局所体、 \bar{k} を k の代数閉包、 $G_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{k}/k)$ 、 $|\cdot|: \bar{k} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \mapsto |a|$) を \bar{k} の上の $|p| = p^{-1}$ と正規化された p 進絶対値、

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k^\times &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid |a| = 1\} \subseteq \mathcal{O}_k^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid 0 < |a| \leq 1\} \\ &\subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \bar{k} \mid |a| \leq 1\} \subseteq \bar{k}, \\ \mathcal{O}_k^\times &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_k^\times)^{G_k} \subseteq \mathcal{O}_k^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_k^\triangleright)^{G_k} \subseteq \mathcal{O}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\bar{k}}^{G_k} \subseteq k = \bar{k}^{G_k} \end{aligned}$$

としましょう。また、 p と異なる奇素数 l を固定します。 E を k 上の楕円曲線であって \mathcal{O}_k 上の分裂乗法的還元を持つものとして、その q パラメータを $q_E \in \mathcal{O}_k^\triangleright \setminus \mathcal{O}_k^\times$ と書くことにしましょう。(したがって、この “ q_E ” は、§12 までの議論において “ q_E ” ではなく “ q_v ” と記されていたような対象です。) また、 E にその原点に付随する対数構造を入れることで得られる (滑らかな) k 上の対数曲線を X^{\log} と書くことにします。記号の乱用になりますが、以下、そのような k 上の対数曲線だけでなく、その対数曲線の安定還元として得られる \mathcal{O}_k 上の安定対数曲線も同じ記号で表すことにしましょう。つまり、例えば X^{\log} の場合、 k 上の対数曲線も X^{\log} と書きますが、 X^{\log} の安定還元として得られる \mathcal{O}_k 上の安定対数曲線も X^{\log} と書くことにしましょう。次に、 $\{\pm 1\}$ の楕円曲線 E への作用による X^{\log} の商を考えることによって得られる k 上の対数軌道曲線を C^{\log} と書くことにします:

$$X^{\log} \longrightarrow C^{\log} \stackrel{\text{def}}{=} [X^{\log}/\{\pm 1\}] \quad (\text{軌道体論的商}).$$

単テータ環境 (あるいは、“宇宙際 Teichmüller 理論に登場する楕円曲線に対する単テータ環境”) について議論をするためには、導入した様々な対象に対して、いくつか仮定を課さなければなりません。詳細は省略しますが、例えば、“ p は奇素数” であるといったものや、“ k が充分大きい” といったものの他に、

“ k 上の対数軌道曲線 C^{\log} は k コア (k -core — cf. [5], Remark 2.1.1) である”

という仮定があります。これは、以下のように定義される圏において、 C^{\log} が終対象となるという意味です: 対象は C^{\log} と同種な対数軌道曲線 (すなわち、 C^{\log} の連結有限次 Kummer 対数エタール被覆の有限次 Kummer 対数エタール商として得られる対数軌道曲線)、対象の間の射はそういった対数軌道曲線の間 k 上の Kummer 対数エタール被覆。この仮定によって、楕円カスプ化 (elliptic cuspidalization — cf. [8], Example 3.2, Corollaries 3.3, 3.4) という技術を適用することができるようになります。また、この “ k コア” という仮定は、“数体たちの圏における有理数体の振る舞い” を連想させます。実際、有理数体は、上で説明したような “ C^{\log} に対する終対象性” の類似的性質を満たします。つまり、この仮定によって、 C^{\log} と同種な対数軌道曲線 (例えば、 X^{\log}) たちが、まるで “数体のように振る舞う” ことになるのです。(一方、簡単に確認できるとおり、いかなる 1 変数代数関数体も、上で説明したような “終対象性” を満たしません。また、すべての対数軌道曲線が上で説明したような “終対象性” を持つ対数軌道曲線と同種になるわけでもありません。上記のような “終対象性” を持つ対数軌道曲線と同種にならない曲線は、志村曲線と同種な曲線であり ([5], Remark 2.5.1, を参照ください)、数論的 (arithmetic — cf. [5], Definition 2.1, (i); Remark 2.1.1) な対数軌道曲線と呼ばれています。)

さて、そのようないくつかの適当な仮定のもと、

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{\dot{Y}}^{\log} & \xrightarrow{(1)} & \dot{Y}^{\log} & & \\
 (2) \downarrow & & (3) \downarrow & & \\
 \underline{Y}^{\log} & \xrightarrow{(4)} & Y^{\log} & & \\
 (5) \downarrow & & (6) \downarrow & & \\
 \underline{X}^{\log} & \xrightarrow{(7)} & \underline{X}^{\log} & \xrightarrow{(8)} & X^{\log} \\
 & & (9) \downarrow & & (10) \downarrow \\
 & & \underline{C}^{\log} & \xrightarrow{(11)} & C^{\log}
 \end{array}$$

という C^{\log} の連結緩和 Kummer 対数エタール被覆の可換図式が得られます。((10) は C^{\log} の定義に既に登場した 2 重被覆です。) 図式に登場する対象や射の正確な定義や条件は省略しますが、これらがどのようなものなのか、その雰囲気をつかむために、いくつかの重要な性質を以下に列挙します:

(a) 図式に登場する 3 つの正方形はカルテシアン。

(b) すべての射は連結緩和 Kummer 対数エタール被覆。 (5) と (6) 以外は有限次 (Kummer 対数エタール被覆)。次数は順番に, $l, 2, 2, l, \infty, \infty, l, l, 2, 2, l$ 。

(c) (6) と (8) の合成 $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$ は X^{\log} の特殊ファイバーの双対 (半) グラフの普遍被覆から生じる連結緩和 Kummer 対数エタール被覆。その定義から、特に、その Galois 群は \mathbb{Z} と同型。この Galois 群を $\underline{\mathbb{Z}}$ と書くことにする。また、再びその定義から、 Y^{\log} の特殊ファイバーは “ $\#\underline{\mathbb{Z}}$ 個” の射影直線からなり、カスプも丁度 “ $\#\underline{\mathbb{Z}}$ 個”。

(d) (8) は $\underline{\mathbb{Z}}$ 被覆 $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$ の $l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \subseteq \underline{\mathbb{Z}}$ に対応する部分 (有限次エタール) 被覆。この事実により、特に、その Galois 群は $\underline{\mathbb{Z}}/l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{F}_l$ と同型。この Galois 群を \mathbb{F}_l と書くことにする。また、再びその定義から、 \underline{X}^{\log} の特殊ファイバーは l 個の射影直線からなり、カスプは丁度 l 個。また、再び上の事実により、(l 個あるというその) \underline{X}^{\log} のカスプを 1 つ固定する毎に \underline{X}^{\log} の下部スキームには (その固定したカスプを原点とする) 楕円曲線の構造が定まり、 $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ は楕円曲線間の準同型射を定める。

以下、 \underline{X}^{\log} のカスプを 1 つ固定して、これを 零カスプ (zero cusp — cf., e.g., [11], Remark 1.4.1, (i)) と呼ぶことにする。これにより、上述のように、 \underline{X}^{\log} の下部スキームに楕円曲線の構造が定まる。特に、その楕円曲線の構造から、 $\{\pm 1\}$ の \underline{X}^{\log} への作用が定まる。

(e) (9) は (d) で固定した零カスプによって定まる $\{\pm 1\}$ の作用による \underline{X}^{\log} の (軌道体論的) 商を考えることで得られる 2 重被覆。 (9) による零カスプの像として得られる \underline{C}^{\log} のカスプも零カスプと呼ぶことにする。

(f) (11) 以外は Galois。Galois 群は順番に, $\mu_l, \mu_2, \mu_2, \mu_l, l \cdot \underline{\mathbb{Z}}, l \cdot \underline{\mathbb{Z}}, \mu_l, \mathbb{F}_l, \{\pm 1\}, \{\pm 1\}$ 。

(g) (7) は \underline{X}^{\log} のすべての (つまり、 l 個の) カスプで完全分岐する有限次 Kummer 対数エタール被覆。特に、 \underline{X}^{\log} の特殊ファイバーの既約成分は l 個であり、カスプも丁度 l 個。 (7) による零カスプの逆像として得られる \underline{X}^{\log} の (ただ 1 つの) カスプも零カスプと呼ぶことにする。

(h) (3) は Y^{\log} のすべての (つまり、 “ $\#\underline{\mathbb{Z}}$ 個” の) カスプで不分岐な 2 重被覆。これにより、 \dot{Y}^{\log} の特殊

ファイバーは “ $\# \mathbb{Z}$ 個” の射影直線からなり、カスプは丁度 “ $\# \mathbb{Z}$ 個の 2 倍” .

- (i) $C^{\log}, \underline{C}^{\log}$ の k 上の自己同型は恒等写像のみ.
- (j) $X^{\log}, \underline{X}^{\log}, \underline{\underline{X}}^{\log}$ の k 上の自己同型のなす群はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Gal}(X^{\log}/C^{\log}) &\cong \{\pm 1\}, \\ \text{Gal}(\underline{X}^{\log}/C^{\log}) &\cong \text{Gal}(\underline{X}^{\log}/X^{\log}) \rtimes \text{Gal}(X^{\log}/C^{\log}) \cong \mathbb{F}_l \rtimes \{\pm 1\}, \\ \text{Gal}(\underline{\underline{X}}^{\log}/C^{\log}) &\cong \text{Gal}(\underline{\underline{X}}^{\log}/\underline{X}^{\log}) \times \text{Gal}(X^{\log}/C^{\log}) \cong \mu_l \times \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

上に登場した曲線 “(-)” の特殊ファイバーの既約成分のなす集合を “ $\text{Vert}(-)$ ”, カスプのなす集合を “ $\text{Cusp}(-)$ ” と書くことにしましょう. そして, $\text{Vert}(Y^{\log})$ の元 (つまり, Y^{\log} の特殊ファイバーの既約成分) であって, その \underline{X}^{\log} への像が零カスプを含むものを 1 つ固定しましょう. (簡単にわかるとおり, そのような元たちは $\text{Vert}(Y^{\log})$ の中のある 1 つの $l \cdot \mathbb{Z}$ 軌道をなします.) すると, (c) から, この既約成分は, $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(Y^{\log}) \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(Y^{\log})$ という \mathbb{Z} 同変な全単射を定めます. そして, 上で列挙した諸性質から簡単に確認できるとおり, この全単射は,

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} \text{Vert}(\underline{\underline{Y}}^{\log}) & \xrightarrow{(1)} & \text{Vert}(\underline{\underline{Y}}^{\log}) \\ (2) \downarrow & & (3) \downarrow \\ \text{Vert}(\underline{Y}^{\log}) & \xrightarrow{(4)} & \text{Vert}(Y^{\log}) \\ (5) \downarrow & & (6) \downarrow \\ \text{Vert}(\underline{X}^{\log}) & \xrightarrow{(7)} & \text{Vert}(\underline{X}^{\log}) \xrightarrow{(8)} \text{Vert}(X^{\log}) \\ & (9) \downarrow & (10) \downarrow \\ & \text{Vert}(\underline{C}^{\log}) \xrightarrow{(11)} & \text{Vert}(C^{\log}) \end{array} \right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{(1)} & \mathbb{Z} \\ (2) \downarrow & & (3) \downarrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(4)} & \mathbb{Z} \\ (5) \downarrow & & (6) \downarrow \\ \mathbb{F}_l & \xrightarrow{(7)} & \mathbb{F}_l \xrightarrow{(8)} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{1\} \\ & (9) \downarrow & (10) \downarrow \\ & \mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \xrightarrow{(11)} & \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{1\} \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} \text{Cusp}(\underline{\underline{Y}}^{\log}) & \xrightarrow{(1)} & \text{Cusp}(\underline{\underline{Y}}^{\log}) \\ (2) \downarrow & & (3) \downarrow \\ \text{Cusp}(\underline{Y}^{\log}) & \xrightarrow{(4)} & \text{Cusp}(Y^{\log}) \\ (5) \downarrow & & (6) \downarrow \\ \text{Cusp}(\underline{X}^{\log}) & \xrightarrow{(7)} & \text{Cusp}(\underline{X}^{\log}) \xrightarrow{(8)} \text{Cusp}(X^{\log}) \\ & (9) \downarrow & (10) \downarrow \\ & \text{Cusp}(\underline{C}^{\log}) \xrightarrow{(11)} & \text{Cusp}(C^{\log}) \end{array} \right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} & \xrightarrow{(1)} & \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z} \\ (2) \downarrow & & (3) \downarrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(4)} & \mathbb{Z} \\ (5) \downarrow & & (6) \downarrow \\ \mathbb{F}_l & \xrightarrow{(7)} & \mathbb{F}_l \xrightarrow{(8)} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{1\} \\ & (9) \downarrow & (10) \downarrow \\ & \mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \xrightarrow{(11)} & \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{1\} \end{array} \right) \end{array}$$

という図式の間全単射を導きます. また, 再び簡単に確認できるとおり,

$1, -1 \in \mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(\underline{X}^{\log})$ に対応する既約成分は, \underline{X}^{\log} の零カスプが乗っている既約成分の “隣” の既約成分であり, そして, (その像) $\bar{1} \in \mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(\underline{C}^{\log})$ に対応する既約成分は, \underline{C}^{\log} の零カスプが乗っている既約成分の “隣” の既約成分

となります。

上で導入した様々な被覆の役割は、エタールテータ関数の理論の文脈では、大雑把には、以下のようにまとめられると思います：

- X^{\log} : 与えられた楕円曲線 E と “等価” な対数曲線.
- C^{\log} : (“数体たち” に対する “有理数体” のような) 登場する様々な被覆に対する “強い剛性を持つ核心”.
- $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$: X^{\log} の特殊ファイバーの双対 (半) グラフによる “部分的一意化”. テータ関数の定義域の定義の準備.
- $\check{Y}^{\log} (\rightarrow Y^{\log})$: テータ関数の定義域.
- $\check{\underline{Y}}^{\log} (\rightarrow \check{Y}^{\log})$: テータ関数の l 乗根の定義域.
- $\underline{Y}^{\log} (\rightarrow Y^{\log})$: 単テータ環境の “定義域”.
- $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$: 被覆 $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$ の “有限近似”. つまり、大雑把には、“ \mathbb{Z} ” の “ \mathbb{F}_l ” による “近似” の幾何学版. (宇宙際 Teichmüller 理論では、この §13 から §16 で考察を行う局所的なエタールテータ関数の理論を、大域的に “再編集” します — というより、宇宙際 Teichmüller 理論とは、“エタールテータ関数の理論の適切な大域化” だと言い切っても良いかもしれません. しかしながら、大域的な設定、つまり、数体上では、“ $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” のような無限次被覆は存在しません. そのため、“ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” のようなその “有限近似” を考察する必要があります.)
- $\underline{\underline{X}}^{\log} \rightarrow \underline{X}^{\log}$: X 上の有限な被覆による被覆 $\check{\underline{Y}}^{\log} \rightarrow \check{Y}^{\log}$ (あるいは、被覆 $\underline{Y}^{\log} \rightarrow Y^{\log}$) の “近似”.

古典的なテータ関数の理論から、 $0 \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(\check{Y}^{\log})$ に対応する既約成分 (つまり、上で固定した Y^{\log} の特殊ファイバーの既約成分の上にある \check{Y}^{\log} の特殊ファイバーのただ 1 つの既約成分) の上で

$$\check{\Theta}(\check{u}) = q_E^{-\frac{1}{8}} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \cdot q_E^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} \cdot \check{u}^{2n+1}$$

— ここで、 \check{u} は考察下の既約成分の標準的な座標 — という表示を持つ \check{Y}^{\log} 上の有理関数 $\check{\Theta}$ がただ 1 つ存在します. ([7], Proposition 1.4, を参照ください.) この有理関数 (の簡単な修正版 — 具体的には、この関数の適当な定数倍の l 乗根の (乗法的) 逆元) が宇宙際 Teichmüller 理論で重要な役割を果たすテータ関数です.

この有理関数の持つ重要な性質の 1 つとして、

(k) $\check{\Theta}$ は、 \check{Y} の各カスプで 1 位の零を持ち、また、 $j \in \mathbb{Z}$ に対応する既約成分 (の生成点) で $(j^2/2) \cdot \text{ord}_k(q_E)$ 位の極を持ち、そして、零や極はこれらのみ

という性質が挙げられます. また、この有理関数の特殊値も非常に重要です. \underline{X}^{\log} の下部スキームとして得られる楕円曲線 ((d) を参照) の、その閉包が $0 \in \mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(\underline{X}^{\log})$ に対応する既約成分と交わる、位数 2 の (ただ 1 つの k 有理) 点を μ_- とします. そして、 $j \in \mathbb{Z}$ に対して、 $j \bmod l \in \mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(\underline{X}^{\log})$ に対応するカスプと μ_- の和として得られる \underline{X}^{\log} の (k 有理) 点を、 j (あるいは、 $j \bmod l$) でラベル付けされた 代入点 (evaluation point — cf. [10], Example 4.4, (i)) と呼ぶことにしましょう. (したがって、特に、0 でラベル付けされた代入点は μ_- 自身です.) 更に、その閉包が $j \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Vert}(\check{Y}^{\log})$ に対応する既約成分と交わり、かつ、 \underline{X}^{\log} の j でラベル付けされた代入点の上にある \check{Y}^{\log} の (k 有理) 点も、 j でラベル付けされた代入点と

呼ぶことにします. また, \underline{X}^{\log} (あるいは \underline{Y}^{\log}) の (k 有理) 点であって, \underline{X}^{\log} (あるいは \underline{Y}^{\log}) の j でラベル付けされた代入点の上にあるものも, j でラベル付けされた代入点と呼ぶことにしましょう. すると,

$$(l) \quad j \text{ でラベル付けされた } \underline{Y}^{\log} \text{ の代入点を } \xi_j \text{ と書くことにすると, } \ddot{\Theta}(\xi_j)^{-1} = \pm \ddot{\Theta}(\xi_0)^{-1} \cdot q_E^{j^2/2}$$

となることがわかり, 特に,

(m) j でラベル付けされた \underline{Y}^{\log} の代入点 ξ_j と書くことにすると, $\ddot{\Theta}(\xi_0)^{-1} \cdot \ddot{\Theta}$ という形で “定数倍” に関する正規化を行った関数の (乗法的) 逆元の ξ_j での値は $\pm q_E^{j^2/2}$

となることがわかります. (m) で行ったこの “定数倍” に関する正規化の結果を 標準型 (of standard type — cf. [7], Definition 1.9, (ii)) と呼びます.

上記の性質 (m) のとおり, 標準型テータ関数の (乗法的) 逆元の ξ_j での値は $\pm q_E^{j^2/2}$ です. この特殊値が, 我々が目標としている多輻的アルゴリズムの出力に登場する “ q_E^N ” の原型となります.

14 単テータ環境

この §14 では, “単テータ環境” という概念の簡単な解説を行います. (この §14 の内容について, 詳しくは, [7] の §1 や §2 や §5 を参照ください.) §13 に登場した様々な曲線 “ $(-)^{\log}$ ” に対して, その緩和基本群を $\Pi_{(-)}^{\text{tp}}$ と書き, そして, $\Delta_{(-)}^{\text{tp}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\Pi_{(-)}^{\text{tp}} \rightarrow G_k)$ と書くことにしましょう. また, 正整数 N に対して, $\mu_N \stackrel{\text{def}}{=} \mu_N(\bar{k})$ とします. すると, 自然な全射 $\Pi_{(-)}^{\text{tp}} \rightarrow G_k$ によって G_k の μ_N への自然な作用を引き戻すことで, $\Pi_{(-)}^{\text{tp}}$ の μ_N への作用が得られます. この作用による半直積を, $\Pi_{(-)}^{\text{tp}}[\mu_N] \stackrel{\text{def}}{=} \mu_N \rtimes \Pi_{(-)}^{\text{tp}}$ と書くことにします.

X^{\log} は “一点抜き楕円曲線” (に付随する対数曲線) ですので, Δ_X^{tp} の副有限完備化 Δ_X は 2 元生成の自由副有限群です. したがって, $\Delta_X^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_X/[\Delta_X, \Delta_X]$ は階数 2 の自由 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 加群であり, また,

$$\Delta_{\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} [\Delta_X, \Delta_X]/[\Delta_X, [\Delta_X, \Delta_X]]$$

は $\Delta_X^{\text{ab}} \wedge \Delta_X^{\text{ab}}$ と自然に同型な階数 1 の自由 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 加群となります. その上, 簡単に確認できることですが, X^{\log} のただ 1 つのカスプに付随する惰性群 (つまり, §1 の (c) のような形の円分物) とこの Δ_{Θ} の間には, $\Delta_X \rightarrow \Delta_X/[\Delta_X, [\Delta_X, \Delta_X]]$ という自然な全射によって誘導される同型が存在します. これにより,

$$\Delta_{\Theta} \text{ は “} X^{\log} \text{ に付随するエタールの円分物”}$$

と考えられることがわかります. (§1 で議論したような) スキーム論から生じる円分同期化 $\Lambda(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Theta}$ の存在を思い出しましょう.

コホモロジー類

$$\ddot{\eta}^{\Theta} \in H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, \Lambda(\bar{k})) \xrightarrow{\sim} H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, \Delta_{\Theta})$$

を $\mathcal{O}_k^{\times} \cdot \ddot{\Theta}$ のある元の Kummer 類とします. (これは §13 の (k) によって定義可能です.) こういった元は エタールテータ関数 (étale theta function — cf. [7], Proposition 1.4, (iii)) と呼ばれます. このとき, このエタールテータ関数の “ l 乗根” と呼ぶべき元

$$\underline{\ddot{\eta}}^{\Theta} \in H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, l \cdot \Delta_{\Theta})$$

が存在します. つまり, この元の自然な射 $H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, l \cdot \Delta_{\Theta}) \rightarrow H^1(\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}, \Delta_{\Theta})$ による像は $\ddot{\eta}^{\Theta}|_{\underline{Y}} \in H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, \Delta_{\Theta})$

に一致します. この“エタールテータ関数の l 乗根”を“ \underline{X}^{\log} 由来の対象”と見做すために, $\underline{\eta}^\Theta$ の $\text{Gal}(\underline{Y}^{\log}/\underline{X}^{\log}) = \Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}/\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \cong (l \cdot \mathbb{Z}) \times \mu_2$ の作用による軌道を考えます. この軌道を

$$\underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \mathbb{Z} \times \mu_2} \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, l \cdot \Delta_\Theta)$$

と書くことにしましょう.

N を正整数とします. さて, 定義から当然ですが,

$$\underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \mathbb{Z} \times \mu_2} \bmod N \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, (l \cdot \Delta_\Theta) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

の任意の元は $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \rightarrow (l \cdot \Delta_\Theta) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ なるコサイクルから, 特に $— (l \cdot \Delta_\Theta) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_N$ というスキーム論から生じる円分同期化を通じて $— \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \rightarrow \mu_N$ なるコサイクルから生じます. そして, そのようなコサイクルは,

$$\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N] \rightarrow \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \text{ のある切断と同義反復的な切断との差}$$

として表現することが可能です. この“ある切断” $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \hookrightarrow \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ と自然な単射 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N] \hookrightarrow \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ の合成として得られる準同型

$$s_{\underline{Y}}^\Theta : \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \hookrightarrow \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$$

を法 N テータ切断 (mod N theta section — cf. [7], Definition 2.13, (i)) と呼びます.

また, 簡単に確認できるように, $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ の自己同型であって $\mu_N (\subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$, 及び, $(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N] \rightarrow) \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}$ の上に恒等写像を引き起こすもの全体の $\text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ における像は, $H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, \mu_N)$ と自然に同型です. ですので, 特に, $H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}, \mu_N) \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ という単射準同型が得られます. したがって, Kummer 理論から生じる単射準同型 $k^\times/(k^\times)^N \hookrightarrow H^1(G_k, \mu_N)$ を考えることによって, $k^\times/(k^\times)^N \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ なる単射準同型が得られます.

$$\mathcal{D}_{\underline{Y}} \subseteq \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$$

を, 上の $k^\times/(k^\times)^N \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ の像と $l \cdot \mathbb{Z} = \text{Gal}(\underline{Y}^{\log}/\underline{X}^{\log}) \cong \Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}[\mu_N]/\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N] \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ の像が生成する部分群とします.

位相群 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$, (エタールテータ関数に関わる不定性に対応する) 部分群 $\mathcal{D}_{\underline{Y}} \subseteq \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$, (テータ切断から定まる) 部分群の族 $\{\gamma \cdot \text{Im}(s_{\underline{Y}}^\Theta) \cdot \gamma^{-1} \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]\}_{\gamma \in \mu_N}$ からなる 3 つ組を法 N モデル単テータ環境 (mod N model mono-theta environment — cf. [7], Definition 2.13, (ii)) と呼びます. そして, この 3 つ組の同型物 $\mathbb{M}_N^\Theta \stackrel{\text{def}}{=} (\Pi, \mathcal{D}_\Pi, s_\Pi^\Theta)$ (したがって, Π は位相群, \mathcal{D}_Π は $\text{Out}(\Pi)$ の部分群, s_Π^Θ は Π の部分群の族) のことを法 N 単テータ環境 (mod N mono-theta environment — cf. [7], Definition 2.13, (ii)), あるいは, 簡単に, 単テータ環境 (mono-theta environment) と呼びます. これが, 宇宙際 Teichmüller 理論においてテータ関数を記述する設定として用いられる概念です. ここで, §13 の (k) で与えられた, テータ関数の零や極に関する議論を思い出しましょう. 直前の単テータ環境の定義において, “同義反復的な切断”はその定義に関連させず, (法 N) テータ切断のみを定義の一部として組み込みました. これは, 上で行ったテータ関数の Kummer 類の議論から確認できるとおり, 大雑把には, “テータ関数 $\ddot{\theta}$ の (l 乗根の) (零因子に関連する部分は考えずに) 極因子に関連する部分のみを考えている” という状況に相当します.

エタールテータ関数には, エタールのアプローチとフロベニオイド的アプローチという 2 つのアプローチがあり, この単テータ環境は, それらの重要な“共有対象”です. エタールのアプローチによるエタールテータ関

数とは、すなわち、 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の同型物である位相群から構成されるエタールテータ関数です。(理論のこの部分について、詳しくは、[7], §2, を参照ください。) Π_{\bullet} を $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の同型物としましょう。すると、遠アーベル幾何学の研究によって、この Π_{\bullet} から、 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \subseteq \Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \subseteq \Pi_X^{\text{tp}}$ に対応する位相群 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet}) \subseteq \Pi_{\bullet} \subseteq \Pi_X^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet})$ や、 Π_X^{tp} の部分商である $l \cdot \Delta_{\Theta} \subseteq \Delta_{\Theta}$ に対応する $\Pi_X^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet})$ の部分商 $(l \cdot \Delta_{\Theta})(\Pi_{\bullet}) \subseteq \Delta_{\Theta}(\Pi_{\bullet})$ が構成できます。しかも、 $\mathcal{O}_k^{\times} \cdot \check{\Theta}$ の l 乗根” の Kummer 類に対応する

$$(\mathcal{O}_k^{\times} \cdot \check{\eta}^{\Theta})(\Pi_{\bullet}) \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet}), (l \cdot \Delta_{\Theta})(\Pi_{\bullet}))$$

も — $\Pi_{\bullet}/(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet}))$ 共役、つまり、“ $\text{Gal}(\check{Y}^{\log}/\check{X}^{\log})$ の作用” という不定性のもと — 構成できます。これがエタールテータ関数のエタールのアプローチです。また、これにより、更なる群論的構成を加えることで、単テータ環境も復元可能です。 Π_{\bullet} からアルゴリズム的に、 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の部分群 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}$ に対応する Π_{\bullet} の部分群 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet})$ を復元/構成することができますので、 $\Pi(\Pi_{\bullet}) \stackrel{\text{def}}{=} ((l \cdot \Delta_{\Theta}(\Pi_{\bullet})) \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_{\bullet})$ という、単テータ環境の最初のデータ “ $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ ” が得られます。そして、“ $\mathcal{D}_{\underline{Y}} \subseteq \text{Out}(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N])$ ” や “ $\{\gamma \cdot \text{Im}(s_{\underline{Y}}^{\Theta}) \cdot \gamma^{-1} \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]\}_{\gamma \in \mu_N}$ ” に対応する対象も遠アーベル幾何学によってやはり復元可能で、結果として、位相群 Π_{\bullet} からアルゴリズム的に単テータ環境を構成することができるのです。

次に、エタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチについて解説します。(理論のこの部分について、詳しくは、[7], §5, を参照ください。) 上で考察したエタールテータ関数のエタールのアプローチの出発点は $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の同型物でした。ここで考察したいエタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチの出発点は “ $\underline{\mathcal{F}}$ ” というフロベニオイドの同型物 ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}$ です。このフロベニオイド $\underline{\mathcal{F}}$ をこれまでのように “位相群作用付きモノイドの同型物” として記述することには大変無理があるのですが、強いて試みるならば、 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \curvearrowright \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{適切な正整数 } i \text{ に対して } i \text{ 乗すれば、零と極の因子が } \underline{X} \text{ の普遍幾何学的アーベル緩和被覆上で定義されるような非零有理関数} \}$ といった対象の同型物です。(繰り返しますが、これはあくまで $\underline{\mathcal{F}}$ の雰囲気を表現したものであって、実際にはこうではありません。) そのようなフロベニオイドの同型物 ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}$ から、“ $\check{\Theta}(\xi_0)^{-1} \cdot \check{\Theta} \in \mathcal{M}^{\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}}$ ” (ここで、 ξ_0 は、0 に付随する \check{Y}^{\log} の代入点) という標準型テータ関数の “フロベニオイド論的 l 乗根” である “ $\check{\Theta}^{-1} \in \mathcal{M}^{\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}}$ ” という関数に対応する対象を — $\text{Gal}(\check{Y}^{\log}/\check{X}^{\log}) \times \mu_l$ の作用という不定性のもと — アルゴリズム的に構成することが可能です。これがエタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチです。また、エタールのアプローチと同様に、この場合にも、更に考察を加えることで、単テータ環境も復元可能です。つまり、 ${}^{\dagger}\underline{\mathcal{F}}$ からアルゴリズム的に単テータ環境を構成することができるのです：

$$\text{位相群 } \Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \text{ の同型物} \xrightarrow{\text{アルゴリズム的構成}} \text{単テータ環境} \xleftarrow{\text{アルゴリズム的構成}} \text{フロベニオイド } \underline{\mathcal{F}} \text{ の同型物.}$$

15 単テータ環境の剛性性質

§14 で導入した単テータ環境には、重要な剛性性質があります。この §15 では、その剛性性質を説明します。(この §15 の内容について、詳しくは、[7], §2, を参照ください。)

まず最初は円分剛性 (cyclotomic rigidity) です。([7], Corollary 2.19, (i), を参照ください。) 法 N 単テータ環境 $\mathbb{M}_N^{\Theta} = (\Pi, \mathcal{D}_{\Pi}, s_{\Pi}^{\Theta})$ の一部である位相群 Π は $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ の同型物ですので、その部分商には、2 種類の円分物があります。1 つは $\mu_N = \mu_N \times \{1\} \subseteq \mu_N \times \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}} = \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ という部分群に対応する Π の部分群 $\Pi_{\mu}(\mathbb{M}_N^{\Theta})$ であり、もう 1 つは $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}[\mu_N]$ の部分商である $l \cdot \Delta_{\Theta}$ に対応する Π の部分商 $(l \cdot \Delta_{\Theta})(\mathbb{M}_N^{\Theta})$ です。前者の円分物 $\Pi_{\mu}(\mathbb{M}_N^{\Theta})$ を外部円分物 (exterior cyclotome — cf. [11], Definition 1.1, (ii)) と、後者の円

分物 $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta)$ を内部円分物 (interior cyclotome — cf. [11], Definition 1.1, (ii)) と呼びます. 単テータ環境の円分剛性性質とは, この 2 つの円分物の間の正準的な同型を構成するためのアルゴリズムの存在です. つまり,

$\mathbb{M}_N^\Theta = (\Pi, \mathcal{D}_\Pi, s_\Pi^\Theta)$ というデータから, アルゴリズム的に, 内部円分物と外部円分物 (それら自体を, そして, そ) の間の自然な同型 $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta) \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta)$ を構成することができる

のです.

フロベニオイド $\underline{\mathcal{F}} = “(\Pi_X^{\text{tp}} \curvearrowright \mathcal{M})”$ から構成される単テータ環境の場合, その内部円分物は, “ Π_X^{tp} ” の部分商である “ $l \cdot \Delta_\Theta$ ” に対応する (エタールの) 円分物となり, また, その外部円分物は, “ \mathcal{M} ” の部分群 “ μ_N ” (つまり, もっとも “普通” の円分物) に対応する (Frobenius 的) 円分物となります. そして, この場合, 上述の円分剛性同型 “ $l \cdot \Delta_\Theta \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_N$ ” は, スキーム論から生じる円分剛性と一致することが知られています.

ここで, §2 で説明したいいくつかの円分剛性を思い出しましょう. “ $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\triangleright$ ” というフロベニオイドから出発した場合には, エタールの円分物と Frobenius 的円分物は, 不定性のない単一の同型で正準的に結び付けました. 一方, 例えば, “ $G_k \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times$ ” という対象から出発した場合には, エタールの円分物と Frobenius 的円分物は, $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ という非常に大きい不定性を許容しなければ正準的に結び付けることはできません. したがって, 円分剛性という観点のみから考えますと, “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ ” は “非常に良い対象” で, “ \mathcal{O}_k^\times ” は “あまり良くない対象” だということです. しかしながら, §6 で議論したとおり, 我々がこれまで採用してきた “Diophantus 幾何学的結果へのリンクによるアプローチ” の観点からは, この関係が逆転します. 値群の変形を強いる安直リンク系の結び付きと両立的となるアルゴリズムの構成が我々の目標です. 値群の変形は “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ の共有による値群の剛化” とは相容れず, 高々 “単数系” の対象の共有のみを許す, という観察が, §6 の議論の 1 つの結論でした. したがって, 共有が許されない “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ ” を用いた上述の “良い円分剛性” も共有されない, つまり, 多輻的ではありません. このような観察から, 適切なアルゴリズムの構成という我々の目標を達成するためには, “ $\mathcal{O}_k^\triangleright$ による良い円分剛性” とは異なる何か別の “良い円分剛性” の存在が必要不可欠となることがわかります. この役割を果たす円分剛性の 1 つが, ここで説明を行った単テータ環境による円分剛性なのです.

この円分剛性同型は, 所謂 “テータ群” の非可換性の帰結として得られます. 古典的には, しばしばこのテータ群の非可換性は, 直線束の大域切断のなす線型空間へのテータ群の作用の既約性を導くための性質として用いられます. 一方, 宇宙際 Teichmüller 理論では (あるいは, エタールテータ関数の理論では), このように, 適切な円分剛性を導くための性質として, テータ群の非可換性が用いられます. より具体的には, “ $\Delta_X / [\Delta_X, [\Delta_X, \Delta_X]]$ ” という Δ_X の商に関連する位相群の交換子の構造から, 円分剛性同型が生じます.

§13 の (k) や (m) によって, テータ関数の極因子や特殊値 (したがってテータ関数自体) は \mathbb{Z} の作用に関してまったく不変でないことがわかります. 一方, 上述の説明に登場した “交換子の構造” とは, 実質的には, テータ関数の極因子から定まる直線束の 1 次 Chern 類から生じるものです. そして, この 1 次 Chern 類は — テータ関数それ自体やその特殊値と違って — \mathbb{Z} の作用に関する対称性を有しています. この対称性に対応するように, “交換子の構造” から生じる我々の円分剛性同型も, \mathbb{Z} の作用に関して不変になります. (この “円分剛性同型の対称性” は, [11], Remark 1.1.1, で改めて詳しく論じられています.) この帰結, つまり,

テータ関数の特殊値 (したがって関数自体) は \mathbb{Z} の作用に関してまったく不変でないが, その関数に関わる円分剛性は \mathbb{Z} の作用に関して不変である

という帰結は, 後にこのエタールテータ関数の理論を “大域化” する際に, 非常に重要な役割を果たします. 実際, §20 において, (ここで考察している \mathbb{Z} の作用をその原型とした) 加法的な対称性を用いることで, “異なる

代入点での代入値が違うという事実の尊重のもとでの、それら代入値たちの共通の入れ物への収納”という操作の実現の準備に取り掛かります。そして、その実現のためには、上のような帰結が必要となるのです。

次は 離散剛性 (discrete rigidity) です。 ([7], Corollary 2.19, (ii), を参照ください。) 法 N 単テータ環境 $(\Pi, \mathcal{D}_\Pi, s_\Pi^\ominus)$ と N の約数 M が与えられますと、 Π の外部円分物を “mod M ” することによって (つまり、自然な全射 “ $\mu_N \rightarrow \mu_M$ ” を考えることによって) 法 M 単テータ環境が得られます。この構成によって、“モデル単テータ環境の ($N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に関する) 自然な逆系” というものを考えることができます。一方、一般的な単テータ環境の場合にも、それらの間の射を、次のように定義することができます: “法 N 対法 N ” の場合には、位相群 “ Π ” の間の同型であって付加構造と両立するものとして、“法 N 対法 M ” の場合には、“法 N ” に上の “mod M ” の手続きを適用することで得られる “法 M ” からの射とする。そして、この射の概念を用いて、一般的な単テータ環境の場合にも、($N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に関する) “逆系” (つまり、射影系) というものを定義することが可能です。単テータ環境の離散剛性性質とは、簡単に述べてしまえば、

このような “任意の逆系” が上で述べた “モデルの場合の自然な逆系” と同型になる、

というものです。

単テータ環境の逆系 $M_*^\ominus \stackrel{\text{def}}{=} (M_N^\ominus)_N$ が与えられたとしましょう。すると、各 N に対して、法 N 単テータ環境 M_N^\ominus から、様々な対象を復元/構成することができます。したがって、そういった対象の逆極限を、与えられた逆系 M_*^\ominus に従って定義することができます。このとき、離散剛性性質によって、その逆極限は、“正しい/適切な対象” となることがわかります。一方、もしもこの離散剛性性質を知らなかったとしますと、その逆極限は、高々、“正しい/適切な対象に $\widehat{\mathbb{Z}}$ 的不定性の作用が及んだもの” と確認することしかできなくなってしまい、我々の議論における所望の結論が得られなくなってしまいます。より具体的には、例えば、これまでに登場した “テータ関数の $l \cdot \mathbb{Z}$ 軌道” といった対象を上述のような逆極限として構成しようと試みる際、離散剛性性質を知らなかったとしますと、“テータ関数の $l \cdot \mathbb{Z}$ 軌道” ではなく “テータ関数の $l \cdot \widehat{\mathbb{Z}}$ 軌道” しか構成できなかったりと、困った状況が多発します。各 “ $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の段階” で構成した対象をその逆極限を取ることで “ $\widehat{\mathbb{Z}}$ の段階” にある対象と見做す際、この離散剛性性質は、その対象が本来持っていた “離散性” を保証するのです。

記号を簡単にするために、一般の法 N 単テータ環境ではなく、法 N モデル単テータ環境 $(\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N], \mathcal{D}_Y \subseteq \text{Out}(\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]), \{\gamma \cdot \text{Im}(s_Y^\ominus) \cdot \gamma^{-1} \subseteq \Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]\}_{\gamma \in \mu_N})$ を用いて説明しましょう。テータ切断から定まる部分群 $s^\ominus \in \{\gamma \cdot \text{Im}(s_Y^\ominus) \cdot \gamma^{-1}\}$ を 1 つ固定します。また、 $t^\ominus \subseteq \Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]$ を、 \mathcal{D}_Y のある元で $s^\ominus \subseteq \Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]$ を移すことで得られる部分群とします。このとき、簡単な群論的考察から、以下の性質を満たす $\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]$ の自己同型 $\tilde{\alpha}$ が存在することがわかります: $\tilde{\alpha}(s^\ominus) = t^\ominus$ となり、その上、 $\tilde{\alpha}$ は $\mu_N (\subseteq \Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N])$, 及び、 $(\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N] \rightarrow \Pi_Y^{\text{tp}})$ の上に恒等写像を引き起こす。そして、この設定のもと、以下の事実が、単テータ環境の離散剛性性質を導きます: 上述の自己同型 $\tilde{\alpha}$ は、 $\mathcal{D}_Y \subseteq \text{Out}(\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N])$ を保つ $\Pi_Y^{\text{tp}}[\mu_N]$ の自己同型に延長可能。

上述の “延長可能性” は、“単テータ環境には特別な基点は存在しない” という結論を導きます。ここで、§13 の (k) や (m) で述べられたテータ関数の極因子や特殊値の様子を思い出しましょう。(k) や (m) で与えられた表示のとおり、テータ関数 (したがって、テータ関数の l 乗根) は、§13 の (j) の直後の議論で固定した $\text{Vert}(Y^{\log}) (\cong \text{Vert}(\underline{Y}^{\log}) \cong \text{Vert}(\widehat{\underline{Y}}^{\log}))$ の元に強く依存します。つまり、テータ関数 (したがって、テータ関数の l 乗根) それ自体に対しては、(この “固定された既約成分” という) “特別な基点” が存在するということです。(§13 で行ったように) この “特別な基点” を用いて $\mathbb{Z} \cong \text{Vert}(Y^{\log})$ という同一視を行った場合、テータ関数に対して、 $0 \in \mathbb{Z}$ という “特別な基点” は、他の \mathbb{Z} の元とは置換不可能な役割を果たします。一方、上述の “ $\tilde{\alpha}$ の延長可能性” から — \mathcal{D}_Y の定義に対する $l \cdot \mathbb{Z} = \text{Gal}(\underline{Y}^{\log}/\underline{X}^{\log})$ の寄与の仕方を思い出すと —

単テータ環境には“特別な基点”は存在しないという事実が従うことがわかつています。テータ関数それ自体の場合の“ $0 \in \underline{\mathbb{Z}}$ とその他の $\underline{\mathbb{Z}}$ の元の役割の置換不可能性”とは対照的に、単テータ環境にとって、 $0 \in \underline{\mathbb{Z}}$ の役割は、その他の $l \cdot \underline{\mathbb{Z}}$ の元の役割と置換可能である、ということになります。このように、テータ関数から単テータ環境に移行することで、対象に“大きな自由度”が得られ、その帰結として、この離散剛性性質が得られるのです。

後にそれが必要となるので、単テータ環境の逆系から生じる円分剛性同型について説明しましょう。単テータ環境の逆系 $\mathbb{M}_*^\Theta \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{M}_N^\Theta)_N$ に対して、各 N での外部円分物 $\Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta)$ の逆系 \mathbb{M}_*^Θ に付随する逆極限を $\Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_N \Pi_\mu(\mathbb{M}_N^\Theta)$ と書くことにしましょう。また、逆系 \mathbb{M}_*^Θ において、各 N での内部円分物 $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_N^\Theta)$ はそれぞれ同型で結ばれるため、これら同型を用いて内部円分物たちを同一視することで得られる円分物を $(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta)$ と書くことにしましょう。すると、上で説明した円分剛性性質によって、円分剛性同型

$$(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$$

が得られます。

最後は定数倍剛性 (constant multiple rigidity) です。([7], Corollary 2.19, (iii), を参照ください。) エタールテータ関数のエタール的アプローチの説明の際に述べたとおり、 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の同型物である位相群 Π_\bullet から、単遠アーベル幾何学的に、 $\mathcal{O}_k^\times \cdot \underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2}$ の Kummer 類の $(l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2)$ 軌道に対応する

$$(\mathcal{O}_k^\times \cdot \underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2})(\Pi_\bullet) \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_\bullet), (l \cdot \Delta_\Theta)(\Pi_\bullet))$$

を復元/構成することができます。定数倍剛性性質とは、

テータ関数に付加されているこの“ \mathcal{O}_k^\times ”という不定性 — つまり、“ \mathcal{O}_k^\times の元による定数倍”という不定性 — を、より小さい不定性に取り替えることができる、

というものです。より正確には、この“定数倍”という不定性に対する“良い正規化”が純群論的に実行できる、つまり、標準型テータ関数が — 高々 1 の巾根による定数倍を除いて — 純群論的に特徴付けできるということです。この特徴付けの具体的な方法は、簡単に述べてしまえば、以下のようなものです。遠アーベル幾何学の研究、特に、この場合、§13 で触れた楕円カスプ化という技術によって、位相群 Π_\bullet からアルゴリズム的に、“代入点に付随する $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}$ や $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の分解群 ($\cong G_k$)”に対応する $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_\bullet)$ や $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}(\Pi_\bullet)$ の部分群 ($\cong G_k(\Pi_\bullet)$ — ここで、 $G_k(\Pi_\bullet)$ は、 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \rightarrow G_k$ に対応する Π_\bullet の商 — が復元/構成できます。したがって、考察下の“エタールテータ関数の \mathcal{O}_k^\times の元による定数倍たち” (の Kummer 類) を、そのような様々な代入点の分解群に制限する (つまり、そのような関数たちに様々な代入点を代入する) ことができます。これにより、§13 の (m) から、考察下の“エタールテータ関数の \mathcal{O}_k^\times の元による定数倍たち”のどの元が — 高々 1 の巾根による定数倍を除いて — 標準型となっているかが純群論的に判定できるのです。(この方法による“定数倍部分の正規化”の非常に簡単な例は、§11 の後半で与えた射影直線に関する例における“ ϕ ”に対する“ $e_2(\phi) = 1$ ”という仮定です。) この定数倍剛性性質によって、上に登場した“ l 乗根的な関数” $(\mathcal{O}_k^\times \cdot \underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2})(\Pi_\bullet) \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\Pi_\bullet), (l \cdot \Delta_\Theta)(\Pi_\bullet))$ の場合、不定性は $l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_k^\times$ から $l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_{2l}$ にまで縮めることができます:

$$\mathcal{O}_k^\times \cdot \underline{\eta}^{\Theta, l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2} = (\mathcal{O}_k^\times \cdot (\text{テータ関数 } \Theta)) \text{ の } l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2 \text{ 軌道}$$

定数倍剛性 $\xrightarrow{\text{def}} \underline{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_l \cdot (\text{標準型テータ関数 } \Theta(\xi_0)^{-1} \cdot \Theta \text{ の逆元 } \Theta(\xi_0) \cdot \Theta^{-1} \text{ の } l \text{ 乗根 } \underline{\theta})) \text{ の } l \cdot \underline{\mathbb{Z}} \times \mu_2 \text{ 軌道}$

(残っている μ_{2l} の μ_2 の部分は $\text{Gal}(\ddot{Y}^{\log}/Y^{\log})$ から生じる部分であり, また, μ_l の部分は $\text{Gal}(\ddot{Y}^{\log}/\ddot{Y}^{\log})$ から — つまり, “ l 乗根” を考えているという事情から — 生じる部分です. ですので, この設定で構成される “自然な対象” を考察するならば, 残った μ_{2l} による不定性をこれ以上縮減することはできません.) §9 の最後の部分, つまり, “ q_E^N に関する不干渉性” の説明の際に述べたとおり, テータ関数に対する不定性をこのように高々 1 の巾根程度にまで減らすことができるという事実は, 対数 Kummer 対応の観点からも非常に重要です.

16 テータ関数の多輻的表示

§15 で説明した 3 つの剛性性質によって, 少なくともテータ関数それ自体に対する多輻性を持つ表示を, 以下のような構成によって得ることができます. (この部分について, 詳しくは, [11], §1, を参照ください.)

エタールのアプローチの観点から, まず, 以下の (a), (b) を行います:

(a) $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ の同型物 Π_{\bullet} から出発する.

(b) Π_{\bullet} から, “エタールテータ関数のエタールのアプローチ” によって, 各正整数 N に対する法 N 単テータ環境 $\mathbb{M}_N^{\ominus}(\Pi_{\bullet})$ を構成する.

次に, フロベニオイド的アプローチの観点から, 以下の (a'), (b') を行います:

(a') フロベニオイド $\underline{\mathcal{F}}$ の同型物 $\dagger \underline{\mathcal{F}}$ から出発する.

(b') $\dagger \underline{\mathcal{F}}$ から, “エタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチ” によって, 各正整数 N に対する法 N 単テータ環境 $\mathbb{M}_N^{\ominus}(\dagger \underline{\mathcal{F}})$ を構成する.

このように, エタールのアプローチ, フロベニオイド的アプローチ, いずれに対しても, その “共有物” である単テータ環境に到達できます. そして, 単テータ環境から, 以下のような構成によって, テータ関数の多輻的表示を得ましょう:

(c) ((b) や (b') で構成した, あるいは, 任意の) 法 N 単テータ環境たち $\{\mathbb{M}_N^{\ominus}\}_N$ の逆系 $\mathbb{M}_*^{\ominus} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{M}_N^{\ominus})_N$ は, 単テータ環境の離散剛性性質によって自動的に “適切な系” となる. そして, この逆系から, $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}$ に対応する位相群 $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ や $\Delta_{\underline{Y}}^{\text{tp}} \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}$ に対応する閉部分群 $\Delta_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})) \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ を復元/構成することができる.

(d) (適切な — (c) を参照) 逆系 \mathbb{M}_*^{\ominus} から, 単テータ環境の定数倍剛性性質によって “標準型エタールテータ関数の l 乗根の (乗法的) 逆元”

$$\underline{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus}) \subseteq H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}), (l \cdot \Delta_{\Theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}))$$

という $l \cdot \mathbb{Z} \times \mu_{2l}$ 軌道を復元/構成する. また, 後にこの Kummer 類の単遠アーベル幾何学的輸送を考えたいので, $\underline{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus})$ 自体のみではなく, その “巾根たちの集合”

$$\infty \underline{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus}) \subseteq \infty H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}), (l \cdot \Delta_{\Theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}))$$

(つまり, 上記の群コホモロジーの順極限の元であって, そのある正の整数倍が $\underline{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus})$ に属するものすべてのなす集合) も復元/構成する. (§3 の議論を復習すればわかるとおり, 単遠アーベル幾何学的輸送を行う際 —

より具体的には“Kummer 同型を構成する際” — 所謂“Kummer 理論”を適用するために、輸送したい対象だけでなく、その巾根たち全体を考察することが必要になるという事実に注意.)

(e) 後に Kummer 同型を通じて Frobenius 的对象との間の関連付けを行うため、(d) で構成した対象の入れ物の円分物を内部円分物から外部円分物に変更する. 具体的には、逆系 \mathbb{M}_*^Θ から円分剛性性質によって得られる円分剛性同型

$$(l \cdot \Delta_\Theta)(\mathbb{M}_*^\Theta) \xrightarrow{\sim} \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta)$$

による $\underline{\theta}(\mathbb{M}_*^\Theta)$ や $\infty\underline{\theta}(\mathbb{M}_*^\Theta)$ の像

$$\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \subseteq \infty\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta) \subseteq \infty H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^\Theta), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta))$$

を構成する.

上述の手続きによって、テータ関数のある多輻的な表示が得られました.

また、§15 で説明した定数倍剛性性質 (に関する議論) は、我々が最終的に考察の対象としたい“テータ関数の特殊値の適切な住み処”の構成にも役立ちます. ここで、その構成を行いましょ. (§9 で行った対数リンクの説明の際にも述べましたが) Π_\bullet という位相群は“正則構造”です. この事実により、この場合、 Π_\bullet という位相群からアルゴリズム的に、位相群作用付き代数閉体 “ $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \curvearrowright \bar{k}$ ” とそれに対する Kummer 理論による単射の同型物

$$\Pi_\bullet \curvearrowright \bar{k}(\Pi_\bullet) \supseteq \bar{k}(\Pi_\bullet)^\times \hookrightarrow \infty H^1(G_k(\Pi_\bullet), (l \cdot \Delta_\Theta)(\Pi_\bullet))$$

を復元/構成することができます. そして、これにより、特に、

$$\mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\mu \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\times \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\triangleright \left(\subseteq \infty H^1(G_k(\Pi_\bullet), (l \cdot \Delta_\Theta)(\Pi_\bullet)) \right)$$

という “ $(\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \curvearrowright) \mathcal{O}_{\bar{k}}^\mu \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}}^\times \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}}^\triangleright$ ” の同型物が得られます. テータ関数それ自体は“関数”なので、“ $\mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\triangleright$ ” のような (つまり、 $\mathcal{O}_{\bar{k}}^\triangleright$ のような) 数の集まりには属しませんが、最終的に関心を持っているテータ関数の特殊値はそういった数の集まりの元です.

(f) (e) での議論同様、 Π_\bullet から構成された対象

$$\mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\mu \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\times \subseteq \mathcal{O}_{\bar{k}(\Pi_\bullet)}^\triangleright \left(\subseteq \infty H^1(G_k(\Pi_\bullet), (l \cdot \Delta_\Theta)(\Pi_\bullet)) \right)$$

の入れ物の円分物を、内部円分物から外部円分物に変更する. つまり、(e) で述べた円分剛性同型による像

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) &\subseteq \overline{\mathcal{O}}^\times(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \subseteq \overline{\mathcal{O}}^\triangleright(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \\ &\subseteq \infty H^1(G_k(\Pi_\bullet), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))) \subseteq \infty H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))) \end{aligned}$$

を構成する. また、それと (e) で得られた対象の (コホモロジーでの演算をこれまでどおり加法的に書くならば) “和”

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{O}}^\times \cdot \infty\underline{\theta}_{\text{env}})(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}^\times(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) + \infty\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \\ &\subseteq \infty H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)), \Pi_\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))) \end{aligned}$$

(つまり、“ $a + \eta$ ” — ここで、 a は $\overline{\mathcal{O}}^\times(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))$ の元、 η は $\infty\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))$ の元 — という形をしている元全体の集合) を考える.

(g) §13 の (j) より, \underline{X}^{\log} はただ 1 つの位数 2 の k 上の自己同型を持つ. そして, 遠アーベル幾何学によって, この \underline{X}^{\log} の自己同型の \underline{Y}^{\log} へのある持ち上げに対応する $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ の自己同型 ι を, 以下のような不定性のもと, 復元することができる: $l \cdot \underline{\mathbb{Z}}$ による自然な共役作用, $\Delta_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ の元の共役による内部自己同型, 及び, μ_2 — ただし, μ_2 は $\text{Gal}(\underline{Y}^{\log}/\underline{Y}^{\log})$ として生じる — との合成. したがって, この ι は,

$$\infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))/\overline{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})) \subseteq (\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))/\overline{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$$

に自然に作用し, その作用は, $l \cdot \underline{\mathbb{Z}}$ の共役作用を除けば, 上述の諸々の不定性の影響を受けない. この作用に関する不変部分の $(\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ への引き戻しを

$$\infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota} \subseteq (\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota} \quad (\subseteq (\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})))$$

と書くことにする.

また, \underline{Y}^{\log} のある代入点に付随する分解群に対応するある部分群 $D \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ の共役類の μ_2 軌道であって, ι で固定されるものを (遠アーベル幾何学によって) 復元する. (そのような対象の組 (ι, D) は定点反転自己同型 (pointed inversion automorphism — cf. [11], Remark 1.4.1, (ii); [11], Corollary 1.12, (i)) と呼ばれる.)

(h) “標準型” の定義から (あるいは, 定数倍剛性性質を得る際に用いた議論から) まさに同義反復的に, (g) で得られた “ ι 不変部分” の D への制限 (つまり, “0 でラベル付けされた代入点の代入” に対応する Galois 代入)

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota} &\subseteq \infty H^1(\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})), \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))) \\ &\longrightarrow \infty H^1(D, \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))) \end{aligned}$$

の像は $\overline{\mathcal{O}}^{\times}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ に含まれ, かつ, 全射する:

$$(\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota} \rightarrow \overline{\mathcal{O}}^{\times}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})).$$

この全射によって, 分解

$$\begin{aligned} &(\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot \infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota}/\overline{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})) \\ &= \overline{\mathcal{O}}^{\times\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})) \times \left(\infty_{\underline{\text{env}}}^{\theta}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))^{\iota}/\overline{\mathcal{O}}^{\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet})) \right) \end{aligned}$$

が得られる.

この構成によって, テータ関数だけでなく, その特殊値の住み処となる数の集まり, つまり, 定数部分 $\overline{\mathcal{O}}^{\times\mu}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ も, 多輻的に構成することができました. (もちろんテータ関数の特殊値 “ $q_E^{j^2/2}$ ” はそのままの意味では “ $\overline{\mathcal{O}}^{\times\mu}$ ” の元ではありません. ここでの “住み処” という表現は, §9 で議論した “対数写像を用いて構成される入れ物” という観点からの表現です. つまり, §9 で議論したとおり, 後にこの “ $\overline{\mathcal{O}}^{\times\mu}$ ” を対数写像で加法的に解釈することで, テータ関数の特殊値の “住み処” と見做すのです.) もう少し踏み込みますと, ここで得られた数の集まり/定数部分は, (h) での構成のとおり,

純群論的な手続きによって, 従来備わっていたテータ関数との繋がりが “きれいに” 切り離された単数的加群

となっています。§8 で述べた宇宙際 Teichmüller 理論の主定理のミニチュア版の直後の議論において、“値群部分の変形から単数部分の変形を回避” という重要な文言が登場したことを思い出しましょう。“値群部分の変形” とは、現在の我々の文脈では、“テータ関数を用いた値群部分の変形” ということに他なりません。ですので、§8 で述べた“単数部分の変形の回避” とは、“単数部分とテータ関数の間の関連を（適切に）切り離すこと” に他ならないのです。つまり、上で得た（ある意味では“定数倍剛性性質そのものによる”）分解

$$\begin{aligned} & (\overline{\mathcal{O}}^\times \cdot \infty_{\text{env}})(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))' / \overline{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \\ &= \overline{\mathcal{O}}^{\times\mu}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \times \left(\infty_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet))' / \overline{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{M}_*^\Theta(\Pi_\bullet)) \right) \end{aligned}$$

は、その意味での“値群部分と単数部分の分離” そのものであるということになります。

17 初期 Θ データ

この §17 では、§13 から §16 で解説したテータ関数に関する理論を宇宙際 Teichmüller 理論の枠組みで適用するための大域的な設定の準備について説明したいと思います。特に、宇宙際 Teichmüller 理論の出発点である“初期 Θ データ” という概念を説明することがこの §17 の目標です。§4 の冒頭で導入した設定に戻りましょう。 F を数体、 \overline{F} を F の代数閉包、 $G_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{F}/F)$ 、 $\mathbb{V}(F)$ を F の素点のなす集合、 E を F 上の楕円曲線、 $X \subseteq E$ を E からその原点を取り除くことによって得られる F 上の双曲的曲線とします。また、各 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して、 F_v を F の v での完備化、 \overline{F}_v を \overline{F} を含む F_v の代数閉包、 $G_v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subseteq G_F$ 、 $|\cdot|: \overline{F}_v \rightarrow \mathbb{R} (a \mapsto |a|)$ を \overline{F}_v の上の絶対値であって v が素数 p の上の有限素点の場合には $|p| = p^{-1}$ 、 v が無限素点の場合には $|1| = 1$ と正規化されているもの、

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}_v^\times &\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \overline{F}_v \mid |a| = 1\} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \overline{F}_v \mid 0 < |a| \leq 1\} \\ &\subseteq \overline{\mathcal{O}}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \overline{F}_v \mid |a| \leq 1\} \subseteq \overline{F}_v, \\ \mathcal{O}_{F_v}^\times &\stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathcal{O}}_v^\times)^{G_v} \subseteq \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)^{G_v} \subseteq \mathcal{O}_{F_v} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_v^{G_v} \subseteq F_v = \overline{F}_v^{G_v}, \end{aligned}$$

$E_v \stackrel{\text{def}}{=} E \times_F F_v$ 、 $X_v \stackrel{\text{def}}{=} X \times_F F_v$ とします。そして、すべての有限素点 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して、 E_v は \mathcal{O}_{F_v} 上の高々分裂乗法的還元を持つと仮定しましょう。各素点 $v \in \mathbb{V}(F)$ に対して、 $q_v \in \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ を E_v の q パラメータ（良い還元を持つ有限素点や無限素点では 1）、 $q_E \stackrel{\text{def}}{=} (q_v)_{v \in \mathbb{V}(F)} \in \prod_{v \in \mathbb{V}(F)} \mathcal{O}_{F_v}^\triangleright$ とします。また、§13 と同様に、素数 l を固定しましょう。

§8 では、所望の最終的なアルゴリズムによる出力（の一部）は、“ q_E^N ” という元だと説明しました。そして、§11 で述べたとおり、こういった元は、（単テータ環境の理論によって得られる）“多輻的に表示されたテータ関数の特殊値” として記述されます。ここで、§16 で議論したテータ関数の多輻的な表示を思い出しましょう。§16 での議論のとおり、多輻的に表示される関数は、§13 に登場した“ Θ ” それ自身ではなく、“ Θ の l 乗根”（の適当な定数倍の乗法的逆元）です。そして、その関数の特殊値は、§13 の (m) からわかるとおり — 1 の巾根による寄与を無視すれば — (q_v ではなく)

$$q_v \stackrel{\text{def}}{=} q_v^{1/2l}$$

の整数（の平方による）巾となります。ですので、我々の目標は、（先述のとおり、§8 などでは、“ q_E^N ” が主定理の一部と述べましたが、実際には）

適当な正整数 N に対する $\underline{q}_E^N \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{q}_v^N)_{v \in \mathbb{V}(F)}$

だと考えるべきだということがわかります。以降、こういった元の適切な表示を目的として、議論を進めていきましょう。

さて、上述のとおり、所望の最終的なアルゴリズムによる出力 (の一部) は “ \underline{q}_E^N ” というタイプのもので、 \underline{q}_E^N の定義は $(\underline{q}_v^N)_{v \in \mathbb{V}(F)}$ であり、その各 “ \underline{q}_v ” の右上に乗っている整数 “ N ” は v に依存しません。そして、この “非依存性” は、後にこの元と数体とを関連付ける際に必要となる性質です。一方、再び上述のとおり、これから我々は、多輻的に表示されたテータ関数の特殊値を取ることで “ \underline{q}_E^N ” という元を多輻的に表示しようと考えています。そして、§13 の (m) のとおり、代入点でのテータ関数の特殊値は、その代入点の “ラベル” (§13 の記号では “ $\underline{\mathbb{Z}}$ の元”) に “ $j \mapsto \underline{q}^{j^2}$ ” という所謂 “Gauss 分布的” な形で — 特に、“ \underline{q} ” の右上に乗る整数は “ $j \mapsto j^2$ ” という形で — 依存しています。したがって、各 “ \underline{q}_v ” の右上に乗っている整数 “ N ” を v に依存させないようにするために、

テータ関数の特殊値を考える代入点の “ラベル” を、大域的に適切に管理しなければならない

ということになります。そこで、まず、代入点の “ラベル” を大域的に表示するために、§13 に登場する “ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” という被覆の大域版を考えましょう。

K を $E[l](\bar{F})$ への G_F の作用 (つまり、表現) の核から定まる F の有限次 Galois 拡大、 $X_K \stackrel{\text{def}}{=} X \times_F K$ として、

$$\underline{X}_K \longrightarrow X_K$$

を K 上の双曲的曲線間の連結有限次エタール被覆であって、その Galois 群が \mathbb{F}_l と同型になるようなものとします。(簡単に確認できるとおり、 F 上の双曲的曲線としてそのような被覆を取ることは一般にはできませんし、また、被覆のカスプを有理的にしたいということもあり、 K に底変換しました。) したがって、(再び) 簡単に確認できるとおり、この被覆 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ は X_K のカスプで不分岐であり、 \underline{X}_K のカスプは丁度 l 個の K 有理点からなります。被覆 \underline{X}_K のカスプのなす集合を

$$\text{LabCusp}^{\pm}$$

と書くことにしましょう。これが、§13 で議論した (“ \underline{X}^{\log} ” の) 代入点のラベルのなす集合 (つまり、§13 の記号では “ $\mathbb{F}_l \curvearrowright \text{Cusp}(\underline{X}^{\log})$ ”) の “大域版” です。§13 の (d) と同様に、 LabCusp^{\pm} の元を 1 つ固定して — これにより \underline{X}_K のコンパクト化に楕円曲線の構造が定まります — その元を零カスプと呼びましょう。このとき、 X_K と \underline{X}_K のコンパクト化として生じる楕円曲線の $\{\pm 1\}$ の作用による (軌道体論的) 商を考えることで、

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}_K & \longrightarrow & X_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}_K & \longrightarrow & C_K \end{array}$$

という K 上の双曲的軌道曲線のカルテシアン図式を得ます。ここで、§13 の (e) と同様に、 \underline{X}_K の零カスプの像として得られる \underline{C}_K のカスプも零カスプと呼ぶことにします。

これから我々は、こういった曲線の様々な局所化に対する単テータ環境を考察したいので、やはり §13 と同様に、

K 上の双曲的軌道曲線 C_K は K コアである

と仮定しましょう. (つまり, C_K が, §13 で “ C^{\log} ” に仮定したような “終対象性” を満たすということです.) このコア性の仮定から, §13 の (i) や (j) と同様に,

C_K や \underline{C}_K の K 上の自己同型は恒等写像のみで,

$$\mathrm{Aut}_K(X_K) = \mathrm{Gal}(X_K/C_K) \cong \{\pm 1\},$$

$$\mathrm{Aut}_K(\underline{X}_K) = \mathrm{Gal}(\underline{X}_K/C_K) \cong \mathrm{Gal}(\underline{X}_K/X_K) \rtimes \mathrm{Gal}(X_K/C_K) \cong \mathbb{F}_l \rtimes \{\pm 1\}$$

となるのが簡単に確認できます.

§13 に登場する重要な被覆として, “ $Y^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” という被覆がありました. この被覆の Galois 群は \mathbb{Z} ($\cong \mathbb{Z}$) であり, この群には $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ という生成元 (の 2 つの選択) があります. そして, この “ \mathbb{Z} ” や “ $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ ” が, “ \underline{X}^{\log} ” (そして, それに関連する様々な被覆たち) の特殊ファイバーの既約成分やカスプの集合 (つまり, この §17 で言えば, $\mathrm{LabCusp}^{\pm}$ という集合) の管理を明快にしました. (§13 に登場する大きな図式などを参照.) ここで, その “ $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ ” の大域版として, 現在考察している $\mathrm{LabCusp}^{\pm}$ の — と言うより, “ $\mathrm{Gal}(\underline{X}_K/X_K) \cong \mathbb{F}_l$ の” といった方がもちろん正確ですが — “ \pm 生成元” を決めるために, \underline{C}_K のある非零カスプ (つまり, 零カスプでないカスプ) を 1 つ固定して, それを

ϵ

と書くことにしましょう. したがって, 簡単に確認できるとおり, この ϵ は, 同型 $\mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\underline{X}_K/X_K)$ や (それらの作用と両立的な) 全単射 $\mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \mathrm{LabCusp}^{\pm}$ を “ $\{\pm 1\}$ の作用による不定性” を除いて一意的に決定します. ここで, 用語の説明ですが, \mathbb{F}_l^{\pm} 群 (\mathbb{F}_l^{\pm} -group — cf. [10], Definition 6.1, (i)) とは, 集合 T と全単射 $T \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l$ のある $\{\pm 1\}$ 軌道の組のことです. この用語を用いますと, 直前の観察の帰結は,

ϵ という非零カスプの選択によって, $\mathrm{Gal}(\underline{X}_K/X_K)$ や $\mathrm{LabCusp}^{\pm}$ の上に \mathbb{F}_l^{\pm} 群の構造がただ 1 つ定まる

ということになります. そして, これにより, 特に, ラベルの集合の幾何学的対称性を

$$\mathbb{F}_l^{\times \pm} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{F}_l \rtimes \{\pm 1\} \cong \mathrm{Gal}(\underline{X}_K/C_K) = \mathrm{Aut}_K(\underline{X}_K) \curvearrowright \mathrm{LabCusp}^{\pm} \cong \mathbb{F}_l$$

と理解することができるようになります.

さて, “代入点のラベルの大域的な管理” をその目的として, §13 での “ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” のつもりで, $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ という被覆を 1 つ固定しました. その上, やはり “代入点のラベルの大域的な管理” をその目的として, §13 での “ $\pm 1 \in \mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cusp}(\underline{X}^{\log})$ ” — あるいは, “ $\bar{1} \in \mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cusp}(\underline{C}^{\log})$ ” と言った方が正確かもしれませんが — のつもりで, ϵ という \underline{C}_K の非零カスプを 1 つ固定しました. しかしながら, 困ったことに, 我々が選択した大域的な “ $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ” の様々な局所化が, すべての素点で実際に “そのように” なるわけではもちろんありません. どういうことかと言いますと, つまり, $w \in \mathbb{V}(K)$ を K の有限素点であって $E_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} E \times_F K$ が悪い還元を持つものとしたとき, 選択した大域的な被覆 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ の w での局所化 $\underline{X}_w \rightarrow X_w$ が必ずしも §13 での “ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” のような “グラフ論的/位相幾何学的被覆” (つまり, 特殊ファイバーの既約成分が l 個) になるわけではありません. その上, もしもそうなったとしても, 選択した大域的なカスプ ϵ の局所化 ϵ_w の \underline{X}_w への持ち上げが必ずしも §13 での “ $\pm 1 \in \mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cusp}(\underline{X}^{\log})$ ” のようなカスプ (つまり, 零カスプが乗っている既約成分の “隣” の既約成分に乗っているカスプ) になるわけではないのです. 簡単な考察によってわかりますが, むしろ, E_K が悪い還元を持つ $w \in \mathbb{V}(K)$ すべてに対して “所

望の形”となる“理想的な組 $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ”が存在する“ E/F ”は非常に珍しく、例えば、 G_F の $E[l](\overline{F})$ への作用が比較的大きければ、そういった“ $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ”は存在しません。(本稿では詳しく説明しませんが、そもそも、Hodge-Arakelov 理論 — 例えば、[2], [3] を参照 — による“数体上の楕円曲線に対する Szpiro 予想の解決”へのアプローチに対する大きな障害が、この適切な“ $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ”の非存在です — 例えば、[2], §1.5.1, の最後の議論を参照.)

このままでは“代入点のラベルの大域的な適切な管理”ができませんので、この問題を回避するために、以下のような考察を行いましょ。まず最初に、 $F_{\text{mod}} \subseteq F$ を X のモジュライの体 (つまり、 j_E を E の j 不変量とすると、 $F_{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(j_E)$) としましょ。したがって、 X は F_{mod} 上の双曲的曲線 $X_{F_{\text{mod}}}$ に降下して、そして、 F_{mod} より真に小さい部分体には降下しません。ここで、

有限次拡大 K/F_{mod} , F/F_{mod} が Galois である

と仮定しましょ。([10], Remark 3.1.5, を参照ください。)すると、この Galois 性の仮定から、 F_{mod} への制限が一致する K の素点 w_1, w_2 に対して、“ X_{w_1} の幾何学”と“ X_{w_2} の幾何学”は (例えば w_1 を w_2 に移す $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の元を考えることによって) “同型”, 特に、 $q_{w_1} = q_{w_2}$ となります。この観察により、考察対象とする素点の集合を $\mathbb{V}(K)$ 全体ではなく、 $\mathbb{V}(K) \rightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{V}(F_{\text{mod}})$ という $\mathbb{V}(K)$ の同値関係の代表元のなすある部分集合 — 同じことですが、自然な全射 $\mathbb{V}(K) \rightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}}$ のある固定された切断の像 $\underline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{V}(K)$ (つまり、合成 $\underline{\mathbb{V}} \hookrightarrow \mathbb{V}(K) \rightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}}$ は全単射) — に制限することが可能です。先述のとおり、 E_K の悪い還元を定める $\mathbb{V}(K)$ の元すべてに対して“所望の形”となる“ $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ”が存在する“ E/F ”は非常に珍しく、一般的な“ E/F ”はそのようなものを持ちません。しかしながら、適切な $\underline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{V}(K)$ を選ぶことにすれば、それに対して E_K の悪い還元を定める $\underline{\mathbb{V}}$ の元すべてに対して“所望の形”となる“ $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ ”が存在する“ E/F ”はそれほど珍しくありません。したがって、 $\mathbb{V}(K)$ 全体を考えるのではなく、このようにその適切な部分集合 $\underline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{V}(K)$ を考えることによって、上の問題を回避することができるのです。

また、更に、以下のような考察も可能です。上の議論では、 E_K が悪い還元を持つ $\underline{\mathbb{V}}$ の元全体 $B \subseteq \underline{\mathbb{V}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_{\text{mod}}$ を考察の対象としていました。ここで、 B 全体ではなく、 B の (像の) ある部分集合

$$\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}} \subseteq B \subseteq \mathbb{V}_{\text{mod}}$$

を固定して、考察の対象として採用するのです。 $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}} \subseteq \mathbb{V}_{\text{mod}}$ を $\underline{\mathbb{V}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_{\text{mod}}$ という全単射を通じて $\underline{\mathbb{V}}$ の部分集合と見做すときには

$$\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}} \subseteq \underline{\mathbb{V}}$$

と書くことにします。そして、 $B \setminus \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に属する素点には、(そもそも B に属さない素点同様) “ E_K が良い還元を持つ素点用の理論”を適用する (つまり、 $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}$ に属さない素点はすべて“良い素点扱い”) することによって、これまで問題にしてきた“適切な $(\underline{X}_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ の存在”という“ E/F の可能性の制限”を小さくすることができます。(§13 の冒頭で少し触れましたが、そもそも単テータ環境の理論は、剰余標数が 2 である局所体上の楕円曲線には適用できません。ですので、“ $2 \in B$ ”の場合にも対応できるようにするためには、ここで考察したような $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}$ の導入が必要です.)

上述の説明のように部分集合 $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}} \subseteq \mathbb{V}_{\text{mod}} \xleftarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{V}(K)$ を固定しましょ。したがって、

- $\underline{\mathbb{V}} \subseteq \mathbb{V}(K)$ は自然な全射 $\mathbb{V}(K) \rightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}}$ のある切断の像となっていて、その上、
- $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}} \subseteq \mathbb{V}_{\text{mod}} \xleftarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}}$ は“実際に悪い素点扱いする予定の素点のなす集合”, つまり、
 - $v \in \underline{\mathbb{V}}$ が $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ の元であったとすると、 E_K は v で悪い還元を持ち、

• 局所化 $\underline{X}_v \rightarrow X_v$ は — §13 での “ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” のように — “グラフ論的/位相幾何学的被覆” (つまり, 特殊ファイバーの既約成分が l 個) であり, そして,

• 局所化 $\underline{\epsilon}_v$ は — §13 での “ $\bar{1} \in \mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(\underline{C}^{\log})$ ” のように — その \underline{X}_w への持ち上げが, 零カスプが乗っている既約成分の “隣” の既約成分に乗っているカスプ

となります. これまでの議論によって得られた 7 つ組

$$(\bar{F}/F, X, l, \underline{C}_K, \underline{\mathbb{V}}, \mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}, \epsilon)$$

を初期 Θ データ (initial Θ -data — cf. [10], Definition 3.1) と呼びます. これが宇宙際 Teichmüller 理論の出発点となるデータです. ちなみに, これまでの議論では, \underline{C}_K を決めるために, ある被覆 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ とその上のあるカスプ (つまり, 零カスプ) を選択しました. 一方, 逆に, \underline{C}_K から “被覆 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ と \underline{X}_K の上の (零) カスプ” が一意的に定まることが簡単な考察からわかります. この観察により, (見かけ上選択が少ない) \underline{C}_K の方を, 初期 Θ データの一部にしています. また, この初期 Θ データの満たすべき条件には, これまでに説明しなかったものもあるという事実を指摘しておきます. 例えば, “ $\sqrt{-1} \in F$ ” という条件 (この条件の帰結の 1 つとして, 単データ環境の説明に登場した μ_- という点が有理的になります) や “ l や 2 は $\mathbb{V}_{\text{mod}}^{\text{bad}}$ の任意の元の剰余標数と異なる” という条件 (§13 の冒頭で少し触れましたが, 単データ環境の理論は, l や 2 の上の素点の上では適用できません) や, その他に,

$$\text{“}G_F \text{ の } E[l](\bar{F}) \text{ への作用の像は } \text{SL}_2(\mathbb{F}_l) \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{F}_l) \cong \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(E[l](\bar{F})) \text{ を含む”}$$

といった条件 (など, そして, まだ他にも条件 — 詳しくは, [10], Definition 3.1, を参照ください) があります. (§21 において, 最後の Galois 表現の像に関する条件に若干触れます.) 以下, この初期 Θ データを 1 つ固定しましょう.

§6 の最後に, 様々な種類の素点縞を定義しました. 上で見たように, 考察するべき素点の集合は $\mathbb{V}(F)$ から $\mathbb{V}^{\text{bad}} \subseteq \mathbb{V}$ に変更されましたので, 素点縞の方もここで適切に修正しておきましょう.

$v \in \mathbb{V}(F)$ に対して, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ を $v \in \mathbb{V}(F)$ のある持ち上げとします. $v \in \mathbb{V}(F)$ が (したがって, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が) 有限素点のとき, それぞれ

$$G_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{F}_v/K_v), \quad G_{\underline{v}} \curvearrowright \bar{\mathcal{O}}_v^\times, \quad (G_{\underline{v}} \curvearrowright \bar{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}; H \mapsto I_H^\kappa \subseteq (\bar{\mathcal{O}}_v^{\times\mu})^H)$$

(とだいたい等価なデータ) を,

$$\mathcal{D}_{\underline{v}}^+, \quad \mathcal{F}_{\underline{v}}^{+\times}, \quad \mathcal{F}_{\underline{v}}^{+\times\mu}$$

という記号で表します.

$\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対して, §13 での “ $\underline{X}^{\log} \rightarrow X^{\log}$ ” に相当する $\underline{X}_{\underline{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{X}_K \times_K K_{\underline{v}}$ の有限次エタール被覆を $\underline{X}_{\underline{v}} \rightarrow X_{\underline{v}}$ と書き, その緩和基本群 $\pi_1^{\text{temp}}(\underline{X}_{\underline{v}})$ を $\Pi_{\underline{v}}$ と書きます. また, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathbb{V}} \setminus \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ なる素点に対して, “ $\underline{X}_{\underline{v}} \rightarrow X_{\underline{v}}$ の良い素点類似” として $\underline{X}_{\underline{v}} \rightarrow X_{\underline{v}}$ という連結有限次エタール被覆が存在するので (詳しくは, [10], Definition 1.1, を参照ください), $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が有限素点のときにはそのエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_{\underline{v}})$ を $\Pi_{\underline{v}}$ と書くことにしましょう. $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が任意の (つまり, $\underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に含まれるかどうか問わない) 有限素点のとき, この $\Pi_{\underline{v}}$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{D}_{\underline{v}}$$

という記号で, $\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \bar{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{F}_{\underline{v}}$$

という記号で表します.

そして, やはりこれらの対象 \mathcal{D}_v^+ , $\mathcal{F}_v^{+\times}$, $\mathcal{F}_v^{+\times\mu}$, \mathcal{D}_v , \mathcal{F}_v には “無限素点版” が存在します. (詳しくは, [10], Definition 4.1, (i), (iii); [10], Definition 5.2, (i); [11], Definition 4.9, (vii), を参照ください. $v \in \mathbb{V}$ が無限素点の場合, 例えば \mathcal{D}_v は, \underline{X}_v に付随する Riemann 面から定まる Aut 正則空間 (Aut-holomorphic space — cf. [9], Definition 2.1, (i)) — 考察下の Riemann 面の下部位相空間に, その正則構造を記述するある構造を付加して得られる幾何学的対象 — です.) それらを集めてできる対象 $\{\mathcal{D}_v^+\}_{v \in \mathbb{V}}$, $\{\mathcal{F}_v^{+\times}\}_{v \in \mathbb{V}}$, $\{\mathcal{F}_v^{+\times\mu}\}_{v \in \mathbb{V}}$, $\{\mathcal{D}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$, $\{\mathcal{F}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ (添字集合が $\mathbb{V}(F)$ や $\mathbb{V}(K)$ ではなく \mathbb{V} となっていることに注意しましょう) の同型物を, それぞれ \mathcal{D}^+ , $\mathcal{F}^{+\times}$, $\mathcal{F}^{+\times\mu}$, \mathcal{D} , \mathcal{F} 素点編と呼びます.

18 カスプのラベル類

§17 で

$$\text{LabCusp}^\pm$$

という集合を定義しました. この集合は, \underline{X}_K のカスプのなす集合であり, つまり, 様々な代入点の大域的なラベルのなす集合です. §17 で観察したとおり, (テータ関数の特殊値を考察するための) 局所的な代入点のラベルのなす集合は, この大域的なラベルの集合によって一斉に管理されていると考えられます. また, 再び §17 で観察したとおり, この集合 LabCusp^\pm には $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \cong \text{Aut}_K(\underline{X}_K)$ が自然に作用して, その作用と, 初期 Θ データの一部である $\underline{\epsilon}$ を組み合わせると, \mathbb{F}_l^\pm 群の構造 (つまり, $\{\pm 1\}$ の作用という不定性付きの全単射 $\mathbb{F}_l \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^\pm$) が自然に定まります.

局所的な代入点のラベルのなす集合を, §17 の最後に (再) 導入された \mathcal{D} 素点編を用いて記述しましょう. (この議論について, 詳しくは, [10], Definition 6.1, (iii), を参照ください.) ${}^\dagger\mathcal{D} = \{{}^\dagger\mathcal{D}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ を \mathcal{D} 素点編, $v \in \mathbb{V}$ としましょう. したがって, §17 の最後で述べたとおり, v が有限素点ならば, ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ の v 成分 ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ は Π_v の同型物 (とだいたい等価なデータ) です. このとき, 遠アーベル幾何学の研究によって, ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ からアルゴリズム的に $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_v) (\supseteq \Pi_v)$ に対応する位相群を, そして, その位相群から, \underline{X}_v のカスプのなす集合に対応する集合を復元/構成することができます. こうして得られる集合を

$$\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v)$$

と書くことにしましょう. これは, まさに, §13 で議論された局所的な代入点のラベルのなす集合の “エタール版” です. また, 再び遠アーベル幾何学の研究によって, ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ からアルゴリズム的に, 零カスプや $\underline{\epsilon}_v$ の持ち上げに対応する $\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v)$ の元を復元/構成することができますので, 特に, $\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v)$ の \mathbb{F}_l^\pm 群としての構造が定まります. ここでは v を有限素点としましたが, v が無限素点の場合にも同様な構成が可能です.

T を \mathbb{F}_l^\pm 群としますと, 付加されている全単射 $T \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l$ を通じて, $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \rightarrow \text{Aut}(T)$ なる準同型が, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ の内部自己同型との合成を除いて定まります. この準同型の像を $(\mathbb{F}_l^{\times\pm} \cong) \text{Aut}_\pm(T) \subseteq \text{Aut}(T)$ と書き, また, $\mathbb{F}_l \subseteq \mathbb{F}_l^{\times\pm}$ によって定まる $\text{Aut}_\pm(T)$ の部分群を $(\mathbb{F}_l \cong) \text{Aut}(T)_+ \subseteq \text{Aut}_\pm(T)$ と書くことにしましょう. ([10], Definition 6.1, (i), を参照ください.) (簡単に確認できるとおり, これら部分群は, 全単射に作用する $\{\pm 1\}$ による不定性の影響を受けません.) したがって, 上の考察から,

$$\begin{aligned} \text{Aut}({}^\dagger\mathcal{D}_v) &\longrightarrow \text{Aut}_\pm(\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v)) \\ &\longrightarrow \text{Aut}_\pm(\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v))/\text{Aut}_+(\text{LabCusp}^\pm({}^\dagger\mathcal{D}_v)) \cong \{\pm 1\} \end{aligned}$$

という準同型たちが得られます. これらの準同型の合成の核を

$$\text{Aut}_+(\dagger\mathcal{D}_v) \subseteq \text{Aut}(\dagger\mathcal{D}_v)$$

と書くことにしましょう. ([10], Definition 6.1, (iii), を参照ください.) この部分群は, §20 で説明が与えられる加法的な Hodge 劇場の構成の際に重要な役割を果たします.

さて, LabCusp^\pm は, 実際にテータ関数からその特殊値を取り出す際の代入点たちのラベルのなす集合です. 特に,

“テータ関数からその特殊値への移行” の議論における非常に重要な対象

です. 一方, 一旦特殊値に到達してしまえば, その特殊値たちの振る舞いは, LabCusp^\pm よりも“粗い” 集合で管理可能です. §17 の冒頭で述べたとおり, 代入点でのテータ関数の特殊値は, その代入点のラベル

$$t \in \{-(l-1)/2, \dots, 0, \dots, (l-1)/2\} \cong \mathbb{F}_l \cong \text{LabCusp}^\pm$$

に対して, “ q^{t^2} ” となります. したがって,

$$\mathbb{F}_l \cong \text{LabCusp}^\pm \text{ の } \{\pm 1\} \text{ の作用による商 “}\mathbb{F}_l/\{\pm 1\}\text{” が “特殊値のなす集合”,}$$

特に,

$$\mathbb{F}_l^\times \cong \text{LabCusp}^\pm \setminus \{0\} \text{ の } \{\pm 1\} \text{ の作用による商 “}\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}\text{” が “非単数的特殊値のなす集合”}$$

となります. 我々の目標 (の一部) は “ $q^{\frac{N}{E}}$ ” の多輻的な表示です. そして, それを実現するために, “ $q^{\frac{N}{E}}$ ” をそのまま“数”として理解するのではなく, “テータ関数の特殊値”として理解しようと考えてここまで議論を進めてきました. したがって, このような集合, つまり, “特殊値のなす集合” や “非単数的特殊値のなす集合” が重要であることは, 我々の議論の文脈から明らかでしょう.

§17 において, “代入点のラベルのなす集合” に対して, LabCusp^\pm という幾何学的表示を与えました. それと同様に, 上述の“特殊値系の集合”の幾何学的表示を考えましょう. 簡単にわかりますが,

これら集合, つまり, $\mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \cong \text{LabCusp}^\pm/\{\pm 1\}$, $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\} \cong (\text{LabCusp}^\pm \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ の幾何学的な表示として, \underline{C}_K のカスプのなす集合, \underline{C}_K の非零カスプのなす集合を採用

することが可能です. また, $\mathbb{F}_l/\{\pm 1\} \cong \text{LabCusp}^\pm/\{\pm 1\}$ の元によってラベル付けされる特殊値の中で, “非単数的” なものが特に重要であることは, §4 の前半で与えた所望の評価を導くための議論から明らかでしょう. “非単数的特殊値のなす集合”, つまり, \underline{C}_K の非零カスプのなす集合を

$$\text{LabCusp}$$

と書くことにします. 上述のとおり, この集合は, “テータ関数の特殊値的観点” から述べれば, “非単数的特殊値のなす集合” となります. “代入点のラベルのなす集合” であるところの LabCusp^\pm と, その“部分商”, つまり, “非単数的特殊値のなす集合” であるところの LabCusp の関係は, 簡単に図示すれば, 以下のとおりになります:

$$\begin{aligned} \{ \text{代入点} \} &= \text{LabCusp}^\pm \cong \mathbb{F}_l \supseteq \mathbb{F}_l^\times \\ &\rightarrow \mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\} \cong \text{LabCusp} = \{ \text{代入点での単数でない値} \}. \end{aligned}$$

§17 で述べたとおり, LabCusp^\pm には $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{\times\pm})$ の自然な作用があります. 一方, 簡単に確認できるとおり, 上述の “部分商” の関係, つまり, “ $\mathbb{F}_l \supseteq \mathbb{F}_l^\times \rightarrow \mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}$ ” という関係は, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ の作用と両立せず, したがって, LabCusp^\pm への $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ の作用と両立する LabCusp への $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ の作用はありません. しかしながら, 再び簡単に確認できるとおり, LabCusp への \mathbb{F}_l^\times の (乗法的な) 作用は上述の部分商と両立的であり, したがって, LabCusp^\pm への \mathbb{F}_l^\times の作用と両立する LabCusp への \mathbb{F}_l^\times の作用が得られます. この作用は $\mathbb{F}_l^\times \rightarrow \mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}$ という商を経由して, この商の作用によって, LabCusp を $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}$ 上のトーサーと見做すことができます. また, この対称性 “ $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\} \curvearrowright \text{LabCusp}$ ” を別の定式化で表現すると, 以下のようになります: $E[l](\overline{F}) \rightarrow Q$ を, $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ という被覆から定まる $E[l](\overline{F})$ の (1 次元 \mathbb{F}_l 線型空間である) 商とします. このとき, \underline{X}_K の “原点” を用いると, 構成から, LabCusp と $(Q \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ との間の自然な全単射が得られることは明らかでしょう. そして, \mathbb{F}_l 線型空間 Q への \mathbb{F}_l の作用から出発して, $(Q \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ への $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}$ が得られるわけですが, この作用が, まさに上述の “ $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\} \curvearrowright \text{LabCusp}$ ” に他なりません.

この “LabCusp の対称性” に登場する重要な群 $\mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}$ を \mathbb{F}_l^* と書きます:

$$\mathbb{F}_l^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_l^\times/\{\pm 1\}.$$

ラベルのなす集合 LabCusp^\pm の対称性は $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ という加法的な群で与えられるという事実とは対照的に, 特殊値のなす集合 LabCusp の対称性は \mathbb{F}_l^* という乗法的な群で与えられるのです.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_l^{\times\pm} & & \mathbb{F}_l^* \\ \text{加法的対称性} & \curvearrowright & \text{値を取る} & \curvearrowright & \text{乗法的対称性} \\ \text{LabCusp}^\pm & & & & \text{LabCusp} \end{array}$$

LabCusp^\pm の場合と同様, LabCusp も \mathcal{D} 素点縞によって記述しましょう. (この議論について, 詳しくは, [10], Definition 4.1, (ii), を参照ください.) さきほどと同様に, ${}^\dagger\mathcal{D} = \{{}^\dagger\mathcal{D}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ を \mathcal{D} 素点縞, $v \in \mathbb{V}$ としましょう. したがって, §17 の最後で述べたとおり, v が有限素点ならば, ${}^\dagger\mathcal{D}$ の v 成分 ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ は Π_v の同型物 (とだいたい等価なデータ) です. このとき, 遠アーベル幾何学の研究によって, ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ からアルゴリズム的に $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_v) (\supseteq \Pi_v)$ に対応する位相群を, そして, その位相群から, \underline{C}_v の非零カスプのなす集合に対応する集合を復元/構成することができます. こうして得られる集合を

$$\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}_v)$$

と書くことにしましょう. これは, つまり, “LabCusp” の “エタールの局所版” です. また, 再び遠アーベル幾何学の研究によって, ${}^\dagger\mathcal{D}_v$ からアルゴリズム的に, \mathbb{F}_l^* (“の同型物” ではなく本当に \mathbb{F}_l^*) の $\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}_v)$ への作用や \underline{C}_v に対応する $\text{LabCusp}({}^\dagger\mathcal{D}_v)$ の元を復元/構成することができます. ここでは v を有限素点としましたが, v が無限素点の場合にも同様な構成が可能です.

19 テータ関数に関わる大域的エタールの設定

§13 から §16 で考察したテータ関数の理論は非 Archimedes 的局所的な理論でした. この §19 と §20 では, その局所的なテータ関数を, 宇宙際 Teichmüller 理論の枠組みで記述するための設定である “ $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場” や, その下部構造である “ $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場” の説明を行いたいと思います.

§14 で簡単に説明した “エタールテータ関数のエタールのアプローチ” を, ここでの我々の議論の出発点とします. “エタールテータ関数のエタールのアプローチ” の主役は位相群 “ $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ ”, つまり, \mathcal{D} 素点縞です. \mathcal{D} 素

点編 $\dagger\mathcal{D}_{\succ} = \{\dagger\mathcal{D}_{\succ,v}\}_{v \in \mathbb{V}}$ を 1 つ固定しましょう. また, §17 や §18 で議論した “様々な素点における代入点のラベルの大域的な管理” の “エタール版” を目的に, \underline{X}_K のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_K)$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{D}^{\circ\pm}$$

と書き, その同型物 $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ を 1 つ固定しましょう. ([10], Definition 6.1, (v), を参照ください.) このとき, 遠アーベル幾何学の研究によって, $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ から単遠アーベル幾何学的に, “LabCusp $^{\pm}$ ” に対応する集合

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

を復元/構成することができます. ([10], Definition 6.1, (vi), を参照ください.)

ここで, “各 $v \in \mathbb{V}$ に対する自然な射 $\underline{X}_v, \underline{X}_v \rightarrow (\underline{X}_v \rightarrow) \underline{X}_K$ が誘導する射” $\{\mathcal{D}_v\}_{v \in \mathbb{V}} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{D}_v \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}\}_{v \in \mathbb{V}}$) の同型物

$$\dagger\mathcal{D}_{\succ} \longrightarrow \dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$$

を固定しましょう. すると, 各 $v \in \mathbb{V}$ に対して, 上の写像から

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,v}) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

という全単射が誘導されます. ですので, この全単射たちを用いて, $v \in \mathbb{V}$ を動かすことで, 異なる $v \in \mathbb{V}$ での “LabCusp $^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,v})$ ” の間の全単射が得られます. 各 $v \in \mathbb{V}$ での “LabCusp $^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ,v})$ ” をそれら全単射で同一視することによって得られる集合を

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ})$$

と書くことにしましょう. したがって, 上の全単射から,

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ}) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

という全単射が定まります. この考察により, (少なくとも安直なレベルにおいては) 様々な局所的なラベルの集合を大域的に管理することができました. (ここで行ったラベルに関する議論の “加法的 Hodge 劇場版” は, §20 で改めて述べられます.)

次に, LabCusp $^{\pm}$ に関する重要な対称性 $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{\times\pm}) \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l)$ を群論的に記述するために, 以下のような議論を行います. (この部分について, 詳しくは, [10], Definition 6.1, (v), を参照ください.) 上で述べたとおり, $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ から単遠アーベル幾何学的に, “LabCusp $^{\pm}$ ” に対応する集合 $\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$ を復元/構成することができますので, 特に, $\text{Aut}_{\text{csp}}(\underline{X}_K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\text{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_K))) \curvearrowright \text{Aut}(\underline{X}_K) \rightarrow \text{Aut}(\text{LabCusp}^{\pm})$ (最初の同型は遠アーベル幾何学の研究によって得られる自然な全単射) に対応する部分群, つまり,

$$\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \rightarrow \text{Aut}(\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}))) \subseteq \text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

という部分群を構成することができます. また, 再び遠アーベル幾何学の研究から, $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ から, “ $\text{Out}(\pi_1^{\text{ét}}(\underline{X}_K)) \curvearrowright \text{Aut}(\underline{X}_K) \curvearrowright (E[l](\overline{F}) \rightarrow Q)$ ” — ここで, $E[l](\overline{F}) \rightarrow Q$ は, $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ という被覆から定まる $E[l](\overline{F})$ の (1次元 \mathbb{F}_l 線型空間である) 商 — に対応するデータを復元することができますので, 特に, $\text{Aut}_+(\underline{X}_K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\text{Aut}(\underline{X}_K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(Q)) \subseteq \text{Aut}_{\pm}(\underline{X}_K) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\text{Aut}(\underline{X}_K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(Q)/\{\pm 1\})$ に対応する部分群

$$(\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \subseteq) \text{Aut}_+(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \subseteq \text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \subseteq \text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

を構成することができます。定義から当然 $\text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})$ という作用は $\text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})$ という商を経由します。そして、この結果として得られる作用

$$\text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})$$

が、 LabCusp^{\pm} の対称性

$$\text{Aut}_K(\underline{X}_K) (\cong \mathbb{F}_l^{\times\pm}) \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm} (\cong \mathbb{F}_l)$$

の同型物 (つまり, “エタールの表示”) であることを確認することができます。(特に — §17 の “ $\text{Aut}_K(-)$ ” に関する議論から直ちにわかるとおり — 合成 $\text{Aut}_K(\underline{X}_K) \hookrightarrow \text{Aut}_{\pm}(\underline{X}_K) \rightarrow \text{Aut}_{\pm}(\underline{X}_K)/\text{Aut}_{\text{csp}}(\underline{X}_K)$ が同型であるということです。) この考察により,

$$\begin{array}{ccccccc} \dagger\mathcal{D}_{\gamma} & \longrightarrow & \dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm} & \curvearrowright & & \text{Aut}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) & \\ & & & & & \cup & \\ \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma}) & \xrightarrow{\sim} & \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) & \curvearrowright & \text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) & \longleftarrow & \text{Aut}_{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) \end{array}$$

という図式が得られました。これが、テータ関数に関わる下部 Hodge 劇場, つまり, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の原型です。

直前の図式から出発して, 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ に対して, $\dagger\mathcal{D}_{\gamma}$ の \underline{v} 成分 $\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}}$ に §16 の (a) から (e) の手続きを適用して, エタールテータ関数やその巾根たち

$$\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}})) \subseteq \infty\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}}))$$

を構成しましょう。このとき — $\mathbb{F}_l = \{-(l-1)/2, \dots, 0, \dots, (l-1)/2\}$ という自然な同一視のもと — $\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm}) \cong \mathbb{F}_l$ の元 $j \in \mathbb{F}_l$ でラベル付けされた代入点に対応する $\Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}})$ の分解群にこのエタールテータ関数 $\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}}))$ を制限することで得られる特殊値は, §13 の (m) から,

$$\mu_{2l} \cdot \underline{q}_{\underline{v}}^{j^2} \text{ の元}$$

となります。

20 加法的 Hodge 劇場

それでは, 上の議論のようにして得られる “ $\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})$ の零カスプ以外のある元でラベル付けされた代入点での特殊値” をただ取り出して, それを最終的なアルゴリズムの出力の 1 つである “ $\underline{q}_{\underline{E}}^N$ ” に相当する対象とすることは可能でしょうか。これは, 以下のような議論によって, 少なくともこのままでは不適切であることがわかります。§4 での目標の不等式の導出の議論から簡単にわかるとおり, 目標の内の 1 つである “ $\underline{q}_{\underline{E}}^N$ ” に相当する対象として $\mu_{2l} = \mu_{2l} \cdot \underline{q}_{\underline{v}}^{0^2}$ の元は不適切であり, 上述のように, 特殊値を取る代入点のラベルは, $\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes\pm})$ の零カスプ以外のものであればなりません。そのような特殊値は, エタールテータ関数を, 零でないラベル $j \in \mathbb{F}_l^{\times}$ でラベル付けされた代入点に付随する分解群 $D_j \subseteq \Pi_{\underline{Y}}^{\text{tp}}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}})$ に制限することで得られるため, 特に,

$$\infty H^1(D_j, \Pi_{\mu}(\mathbb{M}_{*}^{\Theta}(\dagger\mathcal{D}_{\gamma, \underline{v}})))$$

の元ということになります。この加群は, 群コホモロジーの順極限ですので, ややこしい対象と感ぜられるかもしれませんが, 要は, “非零元 $j \in \mathbb{F}_l^{\times}$ でラベル付けされた分解群関連の加群” です。ここで, §16 の (h) の構成を思い出しましょう。§16 の (h) で構成された全射の値域は, 現在考察の対象となっているテータ関数の特

殊値の住み処として使用される予定の数の集まり/定数部分です. §16 の (h) での構成の重要な点は, その構成から得られる加群が, 従来備わっている定数部分とテータ関数との繋りを, 純群論的な手続きによって “きれいに” 切り離すことで得られる定数部分である, という点です. 特に, §6 で議論したような “値群の変形を発生する結び付き” に対するコア的対象と関連付けられるべき定数部分は, §16 の (h) で構成されたこの定数部分となります. そして, §16 の (h) の構成から直ちに導かれる (困った) 事実は,

そのような (コア的対象と関連付けられる) 重要な定数部分は, 0 でラベル付けされた代入点での代入によって得られる — 要するに, “(非零元 $j \in \mathbb{F}_l^\times$ ではなく) 零元 $0 \in \mathbb{F}_l$ でラベル付けされた分解群関連の加群” である —

という事実です. これまでの議論をまとめますと, つまり,

“所望の特殊値” を得るためには非零ラベルの代入点における代入を行わなければならないが, その特殊値に対する “所望の入れ物” を得るためには零ラベルの代入点における代入を行わなければならない

ということになります.

上の問題を解決するためには — すなわち,

非零ラベルでの代入によって得られた元を零ラベルでの代入によって得られる入れ物に収納する

ためには — どうすれば良いでしょうか. \mathbb{F}_l^\times の元と $\{0\}$ の元を関連付けたいわけですから, それらを置換する $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を用いるべきだと気がつきます. ではそれを実行しましょう. 上の問題の発生源は, そもそも LabCusp^\pm の各元でラベル付けされた代入点での代入という操作に関わる様々な対象 (例えば, その出力や, 出力が属する集合) はラベルに強く依存するという事実です. (これまでも暗にそのようなことを幾度も行っていたのですが — 例えば, §4 での同型物 “ $\dagger\mathfrak{G}$ と $\ddagger\mathfrak{G}$ ” の導入や §9 で説明した対数リンクという概念の導入) 実質的に区別されるべき対象に対して同じ記号を用いるとその区別が煩雑になりますので, まず最初に, LabCusp^\pm の各元に対して, その元でラベル付けされた \mathcal{D} 素点縞を用意しましょう. \mathbb{F}_l^\pm 群 T と, その元でラベル付けされた \mathcal{D} 素点縞の集まり $\dagger\mathcal{D}_T = \{\dagger\mathcal{D}_t\}_{t \in T}$ を固定します. つまり, $\dagger\mathcal{D}_t$ は “ t でラベル付けされた代入点用の \mathcal{D} 素点縞” ということです.

T の元で添字付けられた \mathcal{D} 素点縞たちを, 大域的な対象と関連付けながら $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性で置換させるために, 以下のような構成を行います. (この部分について, 詳しくは, [10], Example 6.3, を参照ください.) まず, §19 に登場した “自然な射 $\underline{X}_v, \underline{X}_v \rightarrow (\underline{X}_v \rightarrow) \underline{X}_K$ が誘導する射” $\mathcal{D}_{0,v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_v \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ を考えます. 次に, 再び §19 に登場した $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm$ の

$$\text{Aut}_\pm(\mathcal{D}^{\circ\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm}) \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm(\mathcal{D}^{\circ\pm})$$

という再解釈を思い出しましょう. この観点では, $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{Aut}_\pm(\mathcal{D}^{\circ\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm})$ の作用は $\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm})$ の作用を除いてしか決まりません. この問題を回避するために, 上の射 $\mathcal{D}_{0,v} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ の $\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm})$ 軌道という “多重射” を考えることにしましょう. ここでの基本的な目的は “ラベルの管理”, つまり, “カスプの管理” ですので, カスプの集合に自明に作用する $\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm})$ という群による不定性はあまり問題になりません. そして, 定義域, つまり, $\mathcal{D}_{0,v}$ の側も, そのラベルの管理を壊さない程度に不定性を許すことにしましょう. つまり, 多重射 $\mathcal{D}_{0,v} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ の $\text{Aut}_+(\mathcal{D}_{0,v})$ 軌道を考えることにしましょう. こうして得られる多重射, つまり, 従来のな写像 $\mathcal{D}_{0,v} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ の $(\text{Aut}_+(\mathcal{D}_{0,v}), \text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm}))$ 軌道を $\phi_{0,v}^{\text{e1}}$ と書くことにします. そして, $t \in \mathbb{F}_l$ に対して, $\phi_{0,v}^{\text{e1}}$ に更に $t \in \mathbb{F}_l \subseteq \mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{Aut}_\pm(\mathcal{D}^{\circ\pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\mathcal{D}^{\circ\pm})$ の作用を合成して得られる多重

射 $\mathcal{D}_{t,v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_v \rightarrow \mathcal{D}^{\otimes \pm}$ を $\phi_{t,v}^{\Theta^{\text{ell}}}$ と書くことにします. この構成から, まず $t \in \mathbb{F}_l$ を固定して $v \in \underline{\mathbb{V}}$ を動かすことで

$$\phi_t^{\Theta^{\text{ell}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_{t,v}^{\Theta^{\text{ell}}}\}_{v \in \underline{\mathbb{V}}}: \mathfrak{D}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{D}_{t,v}\}_{v \in \underline{\mathbb{V}}} \longrightarrow \mathcal{D}^{\otimes \pm}$$

が定まり, 更に $t \in \mathbb{F}_l$ を動かすことで,

$$\phi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_t^{\Theta^{\text{ell}}}\}_{t \in \mathbb{F}_l}: \{\mathfrak{D}_t\}_{t \in \mathbb{F}_l} \longrightarrow \mathcal{D}^{\otimes \pm} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_t^{\Theta^{\text{ell}}}: \mathfrak{D}_t \longrightarrow \mathcal{D}^{\otimes \pm}\}_{t \in \mathbb{F}_l}$$

が定まります.

さて, 既に固定しておいた $\dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm}$ と $\dagger \mathfrak{D}_T = \{\dagger \mathfrak{D}_t\}_{t \in T}$ に対して, この $\phi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}$ の同型物

$$\dagger \phi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}: \dagger \mathfrak{D}_T = \{\dagger \mathfrak{D}_t\}_{t \in T} \longrightarrow \dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm}$$

のことを \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋 (\mathcal{D} - Θ^{ell} -bridge — cf. [10], Definition 6.4, (ii)) と呼びます. \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋の間の同型射 (の正確な定義は与えていませんが — [10], Definition 6.4, (ii), を参照ください — その) 全体のなす集合は $\text{Aut}_{\pm}(\dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm})/\text{Aut}_{\text{csp}}(\dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm}) (\cong \mathbb{F}_l^{\times \pm})$ 上のトーサーとなります. ([10], Proposition 6.6, (ii), を参照ください.) したがって, その構成から, この \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋という概念によって, T の元で添字付けられた \mathcal{D} 素点縞たちを, 大域的な対象と関連付けながら $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性で置換させることができます.

$t \in T$ を固定しましょう. \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋の構造によって, 様々な局所対象と大域対象とが関連付けられるわけですから, 特に, その構造からアルゴリズム的に, 様々な $v \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する $\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger \mathcal{D}_{t,v})$ の間の自然な全単射を構成することができます. それら全単射を用いて同一視を行うことで得られる集合を

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger \mathfrak{D}_t)$$

と書くことにしましょう. そして, 様々な局所対象と大域対象との関連付けであるところの \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋から, やはりアルゴリズム的に,

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger \mathfrak{D}_t) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm})$$

という全単射を復元/構成することができます. (詳しくは, [10], Proposition 6.5, (i), を参照ください.)

次に, 元々与えられていた $\dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ を, 現在考察している設定の中に適切な形で配置しましょう. 各 t に対して, \mathcal{D} 素点縞のある 1 つの同型 $\dagger \mathfrak{D}_t \xrightarrow{\sim} \dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ の $\{\text{Aut}_{+}(\dagger \mathcal{D}_{t,v})\}_v$ 軌道 (あるいは, $\{\text{Aut}_{+}(\dagger \mathcal{D}_{\succ,v})\}_v$ 軌道と言っても同じです) を固定して $\dagger \phi_t^{\Theta^{\pm}}$ と書きます. この $\dagger \phi_t^{\Theta^{\pm}}$ を集めてできる多重射

$$\dagger \phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger \phi_t^{\Theta^{\pm}}\}_{t \in T}: \dagger \mathfrak{D}_T = \{\dagger \mathfrak{D}_t\}_{t \in T} \longrightarrow \dagger \mathfrak{D}_{\succ} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger \phi_t^{\Theta^{\pm}}: \dagger \mathfrak{D}_t \longrightarrow \dagger \mathfrak{D}_{\succ}\}_{t \in T}$$

を \mathcal{D} - Θ^{\pm} 橋 (\mathcal{D} - Θ^{\pm} -bridge — cf. [10], Definition 6.4, (i)) と呼びます. そして, \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋と \mathcal{D} - Θ^{\pm} 橋を並べてできる

$$\dagger \mathfrak{D}_{\succ} \xleftarrow{\dagger \phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}} \dagger \mathfrak{D}_T = \{\dagger \mathfrak{D}_t\}_{t \in T} \xrightarrow{\dagger \phi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}} \dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm}$$

が \mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場 (\mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ -Hodge theater — cf. [10], Definition 6.4, (iii)) です.

\mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場が与えられますと, §19 で行った議論と同様に, つまり, $\dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ と $\dagger \mathcal{D}^{\otimes \pm}$ との ($\dagger \mathfrak{D}_0$ を通じた) 関連付けを考えることで, $\dagger \mathfrak{D}_{\succ}$ の各 v での “ LabCusp^{\pm} ” の間に全単射が得られます. これにより, やはり,

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger \mathfrak{D}_{\succ})$$

という集合を定義することができます. その上, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の構造から, 各 $t \in T$ に対して

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_t) \xrightarrow{\sim} \text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}_{\succ})$$

という全単射や

$$\text{LabCusp}^{\pm}(\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}) \xrightarrow{\sim} T$$

という全単射を復元/構成することができます. (詳しくは, [10], Proposition 6.5, (ii), (iii), を参照ください.) また, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の間の同型射 (の正確な定義は与えていませんが — [10], Definition 6.4, (iii), を参照ください — その) 全体のなす集合は $\{\pm 1\}$ 上のトーサーとなります. ([10], Proposition 6.6, (iii), を参照ください.) これにより, 様々な局所的設定における “ $\{\pm 1\}$ の作用” を, 大域的に “同期化” することが可能になります.

§19 や §20 で行われた “ラベルの管理” に関わる議論を簡単にまとめると, 以下のようになります:

- §17 の冒頭で述べたように, 様々な局所的な代入点のラベルの集合を大域的に管理しなければならない. そのために, \mathcal{D} 素点縞と大域的な対象 “ $\mathcal{D}^{\circ\pm}$ ” を関連付けなければならない.

- 所望の特殊値は非零ラベルでの代入によって得られる.

- しかしながら, その特殊値の入れ物は (アルゴリズムの多輻性のために) コアの対象と結び付かなければならず, したがって, 零ラベルでの代入によって得られるものを採用しなければならない.

- 非零ラベルでの代入によって得られる元を零ラベルでの代入によって得られる入れ物に収納したいので, 非零元と零元を置換する $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を活用する.

- その際, ラベル毎に異なる事態が発生する — より具体的には, 例えば, 特殊値がラベル毎に違う — という事実が重要なので, “異なるラベルは違うもの” という方向性を尊重しなければならない. しかしながら, 一方で, 異なるラベルの間に関連付けを行う, つまり “異なるラベルも同じようなもの” という方向性の処理を行わなければならない. また, ラベルの大域的な管理を壊してしまわないようにすることも重要である.

最後に, 上述の $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場をその下部構造として持つ “ $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場” について説明しましょう. これまでの設定のもと, $\dagger\mathfrak{F}_t$ ($t \in T$), $\dagger\mathfrak{F}_{\succ}$ を, その下部 \mathcal{D} 素点縞が $\dagger\mathcal{D}_t$, $\dagger\mathcal{D}_{\succ}$ となるような \mathcal{F} 素点縞とします. \mathcal{F} 素点縞の集まり $\dagger\mathfrak{F}_T \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ と $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ に対して, “ $\dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ の下部 \mathcal{D} 素点縞の集まり $\{\dagger\mathcal{D}_t\}_{t \in T}$ と $\dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$ との間の $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\text{ell}}$ 橋” のことを, Θ^{ell} 橋 (Θ^{ell} -bridge — cf. [10], Definition 6.11, (ii)) と呼び,

$$\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}} : \dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T} \longrightarrow \dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$$

という記号で表します. また,

\mathcal{F} 素点縞の間の同型のなす集合からその下部 \mathcal{D} 素点縞の間の同型のなす集合への自然な射は全単射

という事実 ([10], Corollary 5.3, (ii), を参照ください — この事実の有限素点成分に関する部分は, §3 の議論と同様の議論から従います) があるので, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm}$ 橋 $\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}} : \dagger\mathcal{D}_T = \{\dagger\mathcal{D}_t\}_{t \in T} \rightarrow \dagger\mathcal{D}_{\succ}$ は, 多重射の集まり

$$\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}} : \dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T} \longrightarrow \dagger\mathfrak{F}_{\succ} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi_t^{\Theta^{\pm}} : \dagger\mathfrak{F}_t \longrightarrow \dagger\mathfrak{F}_{\succ}\}_{t \in T}$$

を定めます. このようにして得られる対象 $\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ を Θ^{\pm} 橋 (Θ^{\pm} -bridge — cf. [10], Definition 6.11, (i)) と呼びます. 最後に, \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の場合と同様, この Θ^{ell} 橋と Θ^{\pm} 橋を並べてできる対象

$$\dagger\mathfrak{F}_{\succ} \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}} \dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T} \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}} \dagger\mathcal{D}^{\Theta^{\pm}}$$

が $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場 ($\Theta^{\pm\text{ell}}$ -Hodge theater — cf. [10], Definition 6.11, (iii)) です.

21 数体の復元に関わる大域的エタールの設定

§13 から §20 までの間で, テータ関数に関わる様々な観察や議論を行ってきました. この §21 から §25 では, 数体の多輻的な表示に関わる設定についての解説を行いたいと思います. この §21 で考察を行う概念は, “ \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場” と呼ばれる概念です. これは, 数体の多輻的な表示に関わるエタールのな大域的对象と局所的对象との関連を記述する概念です.

ここまでの議論にいくつかの数体が登場しました. 与えられた数体 F , 与えられた楕円曲線 E の l 等分点を有理化する F の有限次拡大 K , 与えられた楕円曲線 E のモジュライの体 F_{mod} です. §8 で述べたとおり, 我々の目標は, 適当な数体に対する強い剛性を持つ表示です. したがって, 表示の対象となる数体としては, 可能な限り剛性が強いものを採用した方が都合が良いと考えられます. F, K, F_{mod} の中で (様々な “勝手な選択” に依存しないという意味において) もっとも剛性が強い数体は F_{mod} です. 以降の我々の目標は, (§8 などでは “ F の多輻的な表示” が主定理の一部と述べましたが, 実際には)

数体 F_{mod} の多輻的な表示

となります. 実際, §17 での “ K/F_{mod} に対する Galois 性の仮定” やその直後の議論 — その上, §8 や §12 で述べた “数体が最終的に果たすべき役割” — から, 我々の最終的な目標に対して, “数体 F_{mod} の多輻的な表示” で充分であることがわかんと思います. また, §17 で, 我々は — “適切な $(X_K \rightarrow X_K, \epsilon)$ の存在” の問題から — 考察する素点の集合を, $\mathbb{V}(F)$ や $\mathbb{V}(K)$ ではなく, $\mathbb{V}(\tilde{\rightarrow} \mathbb{V}_{\text{mod}})$ としました. この観点からも, 良い表示を求めるべき数体として, F や K ではなく, F_{mod} を採用するべきだと考えることができます.

当然ですが, §8 で述べたとおり, 最終的には, “ F_{mod} の多輻的な表示” は, これまで議論してきた “多輻的に表示されたテータ関数やその特殊値” と直接的に関連付けられます. §19 と §20 で議論したとおり, テータ関数やその特殊値の多輻的な表示は, 非自明なラベルの管理をその前提としています. また, 我々は, ラベル毎に — 所謂 “Gauss 分布的” に — 異なる値を取る特殊値たち $\{q_{\pm E}^{j^2}\}_j$ を, §8 で説明した “主定理のミニチュア版” の “ q_E^N ” の役割を果たす対象として採用しようと考えています. したがって, これから行われる数体の多輻的な表示も, 当然, ある適切な — 所謂 “Gauss 分布的” を実現できるような — ラベルの管理と両立する形で行われなければなりません. そうでなければ, テータ関数の特殊値たちと素直に関連付けることができなくなってしまいます.

なお, 次のような観点があることも指摘しておきます. §17 の議論のとおり, テータ関数に関する良い大域的な設定を準備しようとする時, ラベルの管理の問題やテータ関数が定義される被覆の問題から, “基本的な基礎体としての数体” が (F や F_{mod} ではなく) K となってしまいます. 一方, 我々が復元したい数体は F_{mod} です. したがって, これから行われる数体の多輻的な表示は, 何らかの意味で, “数体の拡大 K/F_{mod} の降下情報” (つまり, “ $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ ”, したがって, 特に, “ $\mathbb{V}(K)$ の \mathbb{V}_{mod} 上の適当な置換たち”) と関連する形で行われるべきです.

上の 2 つの議論を大雑把にまとめますと, 我々は,

テータ関数やその特殊値の多輻的な表示のために行った $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を用いた ラベルの管理 を破壊してしまうことなく、かつ、数体の降下情報 に関連するラベルの管理のもと、数体を表示しなければいけない

ということです。そして、更に、

上述のラベルの管理は、零ラベル “ $0 \in \text{LabCusp}^\pm$ ” を隔離する形で与えられなければならない

という観点も重要です。テータ関数の特殊値を考えることで生じる “ $j \mapsto \underline{g}^j$ ” という対応から簡単にわかるとおり、零ラベル $0 \in \text{LabCusp}^\pm$ は “単数的” なラベルであり、そして、非零ラベル (すなわち、 $\text{LabCusp}^\pm \setminus \{0\}$ の元) は “値群的” なラベル — つまり、非単数的なラベル — です。そして、§20 の冒頭でも述べたとおり、零ラベルは “コア的” なラベル — つまり、コア的対象と直接的に関連するラベル — でもあります。一方、以降の議論で、我々は、特定の正則構造から生じるテータ関数の非単数的特殊値たちによる “Gauss 分布的モノイド” や、数体 F_{mod} による “Gauss 分布的対象” の構成、及び、それらの間の関連付けの舞台の準備を行います。そのような “値群的” かつ (特定の正則構造から生じるという意味で) “輻的” な対象を適切な形で構成する設定を準備するためには、“単数的” かつ “コア的” なラベルである零ラベルを切り離さなければなりません。(こういった側面に関するより詳しい解説については、例えば、[11], Remark 4.7.3, を参照ください。)

上で考察を行ったような設定を実現するために、以下の観察を行いましょう。(この議論について、詳しくは、[10], Example 4.3, (i), を参照ください。) §17 で述べたとおり、 $\text{Aut}_K(\underline{C}_K) = \{1\}$ であり、また、 F_{mod} は E のモジュライの体ですので、

自然な射 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Aut}(K)$ は $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}}) \subseteq \text{Aut}(K)$ を経由して、更に、その結果として得られる射 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ は単射、つまり、 \underline{C}_K の対称性はすべて体論的/数論的であり、数体の拡大 K/F_{mod} の降下情報に関連

します。 $\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K)$ を \underline{C}_K の自己同型であって (初期 Θ データの一部である) ϵ というカスプを固定するもの全体のなす群としましょう。すると、定義から、自然な ($\{\pm 1\}$ の作用という不定性が付加された) 表現 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Aut}(E[l](\overline{F}))/\{\pm 1\}$ が誘導する ($\{\pm 1\}$ の作用という不定性が付加された) 表現 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \text{Aut}(Q)/\{\pm 1\} = \mathbb{F}_l^*$ — ここで、 $E[l](\overline{F}) \rightarrow Q$ は、 $\underline{X}_K \rightarrow X_K$ という被覆から定まる $E[l](\overline{F})$ の (1次元 \mathbb{F}_l 線型空間である) 商 — の核が $\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K)$ と一致します。そして、§17 で述べた

$$G_F \text{ の } E[l](\overline{F}) \text{ への作用の像は } \text{SL}_2(\mathbb{F}_l) \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{F}_l) \cong \text{Aut}_{\mathbb{F}_l}(E[l](\overline{F})) \text{ を含む}$$

という仮定より、表現 $\text{Aut}(\underline{C}_K) \rightarrow \mathbb{F}_l^*$ が全射になることが簡単にわかります。これにより、自然な同型

$$\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$$

が得られます。その上、自然な作用

$$\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$$

は LabCusp の \mathbb{F}_l^* 上のトーサーの構造を定めます。(§18 の後半の議論も参照ください。)

ここで、§18 で述べた事実、つまり、被覆 $\underline{X}_K \rightarrow \underline{C}_K$ は LabCusp の LabCusp^\pm の “部分商” としての構造を定める、という事実を思い出しましょう。§18 で述べたとおり、この “部分商” LabCusp への $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ の自然

な作用は存在しません. そのため, 当然, LabCusp に対して, §19 と §20 で行った $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ 対称性を用いた様々な議論をそのまま適用することはできません. しかしながら, (\mathbb{F}_l^* の LabCusp への作用を定める) 乗法的な群 \mathbb{F}_l^\times の作用は, LabCusp の LabCusp^\pm の “部分商” としての構造と両立的です. また, この “部分商” としての構造は, テータ関数の特殊値とも両立的です. つまり, $t_1, t_2 \in \text{LabCusp}^\pm$ が非零であり, かつ, LabCusp の同一の元を定めるとしますと, それはすなわち $t_2 = \pm t_1$ ということですから, (例えば §13 の (m) から) t_1 と t_2 でのテータ関数の特殊値が一致することがわかります. (厳密には “一致する” ではなく “高々 μ_{2l} の差しかない” です.)

このラベルの対称性 $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ に対して, §20 で行った \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋の構成と類似の構成を行いましょ
う. (この議論について, 詳しくは, [10], Example 4.3, を参照ください.) まず最初に, \underline{C}_K のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_K)$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{D}^\circ$$

と書き, そして, $\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \subseteq \text{Aut}(\underline{C}_K)$ に対応する部分群を $\text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{D}^\circ)$ と書くことにしましょ
う. “自然な射 $\underline{X}_v, \underline{X}_v \rightarrow (\underline{C}_v \rightarrow \underline{C}_K)$ が誘導する射” $\mathcal{D}_{1,v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_v \rightarrow \mathcal{D}^\circ$ を考えます. LabCusp に関する重要な対称性 $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ は, 上で議論した

$$\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K) \curvearrowright \text{LabCusp}$$

という対称性として再解釈されますので, \mathcal{D} - Θ^{ell} 橋のときと同様, 上の射 $\mathcal{D}_{1,v} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ の $(\text{Aut}(\mathcal{D}_{1,v}), \text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ))$ 軌道を考えることにしましょ
う. こうして得られる多重射を $\phi_{1,v}^{\text{NF}}$ と書くことにします. そして, $j \in \mathbb{F}_l^*$ に対して, $\phi_{1,v}^{\text{NF}}$ に更に $j \in \mathbb{F}_l^* \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\mathcal{D}^\circ)/\text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ)$ の作用を合成して得られる多重射 $\mathcal{D}_{j,v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_v \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ を $\phi_{j,v}^{\text{NF}}$ と書くことにします. この構成から, まず $j \in \mathbb{F}_l^*$ を固定して $v \in \underline{V}$ を動かすことで

$$\phi_j^{\text{NF}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_{j,v}^{\text{NF}}\}_{v \in \underline{V}}: \mathfrak{D}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{D}_{j,v}\}_{v \in \underline{V}} \rightarrow \mathcal{D}^\circ$$

が定まり, 更に $j \in \mathbb{F}_l^*$ を動かすことで,

$$\phi_*^{\text{NF}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_j^{\text{NF}}\}_{j \in \mathbb{F}_l^*}: \{\mathfrak{D}_j\}_{j \in \mathbb{F}_l^*} \rightarrow \mathcal{D}^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_j^{\text{NF}}: \mathfrak{D}_j \rightarrow \mathcal{D}^\circ\}_{j \in \mathbb{F}_l^*}$$

が定まります. $v \in \underline{V}$ に対して, ϕ_*^{NF} の (j, v) 成分 $\phi_{j,v}^{\text{NF}}$ は, ある射 $\mathcal{D}_{j,v} \rightarrow \mathcal{D}^{\circ\pm}$ の $(\text{Aut}(\mathcal{D}_{j,v}), \text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ))$ 軌道であり, したがって, この多重射が定める K の素点は, $v \in \underline{V}$ の $\text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ)$ 軌道ということになります. ($\text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ)$ の \mathcal{D}° への作用が既に $\mathbb{V}(K)$ に非自明な作用を誘導することに注意しましょ
う.) この軌道たちの和集合を $\underline{V}^{\pm \text{un}}$ と書くことにします:

$$\underline{V}^{\pm \text{un}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}_\epsilon(\mathcal{D}^\circ) \cdot \underline{V}.$$

\mathcal{D}° の同型物 ${}^\dagger \mathcal{D}^\circ$, 元の数

$$l^* \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathbb{F}_l^* = (l-1)/2$$

である有限集合 J , J の元で添字付けられた \mathcal{D} 素点編たちの集まり ${}^\dagger \mathfrak{D}_J \stackrel{\text{def}}{=} \{{}^\dagger \mathfrak{D}_j\}_{j \in J}$ に対して, 上の ϕ_*^{NF} のある同型物

$${}^\dagger \phi_*^{\text{NF}}: {}^\dagger \mathfrak{D}_J = \{{}^\dagger \mathfrak{D}_j\}_{j \in J} \rightarrow {}^\dagger \mathcal{D}^\circ$$

のことを \mathcal{D} -NF 橋 (\mathcal{D} -NF-bridge — cf. [10], Definition 4.6, (i)) と呼びます. \mathcal{D}° の同型物 ${}^\dagger \mathcal{D}^\circ$ から単遠アーベル幾何学的に, “ LabCusp ” に対応する集合

$$\text{LabCusp}({}^\dagger \mathcal{D}^\circ)$$

を復元/構成することが可能であることを注意します。また、 \mathcal{D} -NF 橋の間の同型射 (の正確な定義は与えていませんが — [10], Definition 4.6, (i), を参照ください — その) 全体のなす集合は $\text{Aut}(\underline{C}_K)/\text{Aut}_\epsilon(\underline{C}_K)$ ($\cong \mathbb{F}_l^*$) 上のトーサーとなります。([10], Proposition 4.8, (i), を参照ください。) したがって、その構成から、この \mathcal{D} -NF 橋という概念によって、 J の元で添字付けられた \mathcal{D} 素点縞たちを、大域的な対象と関連付けながら \mathbb{F}_l^* 対称性で置換させることができます。

次に、この \mathcal{D} -NF 橋 (を下部構造として持つ適当な橋) によって記述される数体と、§13 から §20 の間で考察したデータ関数の特殊値とを直接的に関連付けられるようにするために、我々の設定に、代入点に関連するデータを導入しましょう。(この議論について、詳しくは、[10], Example 4.4, を参照ください。) $v \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ と $j \in \mathbb{F}_l^*$ に対して、 j のある持ち上げ $t \in \mathbb{F}_l^\times$ でラベル付けされた \underline{X}_v の代入点が定める自然な全射 $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \rightarrow G_v$ の切断を、 $j \in \mathbb{F}_l^*$ でラベル付けされた 代入切断 (evaluation section — cf. [10], Example 4.4, (i)) と呼びます。つまり、 j のある持ち上げ $t \in \mathbb{F}_l^\times$ でラベル付けされた \underline{X}_v の代入点に付随する分解群が定める切断ということです。ここで、

$$\phi_{j,v}^\ominus: \mathcal{D}_{j,v} \longrightarrow \mathcal{D}_{>,v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_v$$

を、もしも $v \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ ならば充満多重同型、もしも $v \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ ならば $j \in \mathbb{F}_l^*$ でラベル付けされたある代入切断 (つまり、合成 “ $\Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}} \rightarrow G_v \hookrightarrow \Pi_{\underline{X}}^{\text{tp}}$ ” — 後半の射は j でラベル付けされた代入切断) の $(\text{Aut}(\mathcal{D}_{j,v}), \text{Aut}(\mathcal{D}_{>,v}))$ 軌道のなす多重射とします。これによって定まる多重射

$$\phi_j^\ominus \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_{j,v}^\ominus\}_{v \in \underline{\mathbb{V}}}: \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{D}_{>} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{D}_{>,v}\}_{v \in \underline{\mathbb{V}}}$$

— したがって、 $\mathfrak{D}_{>}$ は \mathcal{D} 素点縞 — を集めてできる多重射の集まり

$$\phi_*^\ominus \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_j^\ominus\}_{j \in J}: \{\dagger \mathfrak{D}_j\}_{j \in \mathbb{F}_l^*} \longrightarrow \mathfrak{D}_{>} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_j^\ominus: \mathfrak{D}_j \longrightarrow \mathfrak{D}_{>}\}_{j \in \mathbb{F}_l^*}$$

の同型物

$$\dagger \phi_*^\ominus \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger \phi_j^\ominus\}_{j \in J}: \dagger \mathfrak{D}_J = \{\dagger \mathfrak{D}_j\}_{j \in J} \longrightarrow \dagger \mathfrak{D}_{>}$$

を \mathcal{D} - Θ 橋 (\mathcal{D} - Θ -bridge — cf. [10], Definition 4.6, (ii)) と呼びます。そして、 \mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場の場合と同様、 \mathcal{D} -NF 橋と \mathcal{D} - Θ 橋を並べてできる

$$\dagger \mathcal{D}^\circ \xleftarrow{\dagger \phi_*^{\text{NF}}} \dagger \mathfrak{D}_J = \{\dagger \mathfrak{D}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger \phi_*^\ominus} \dagger \mathfrak{D}_{>}$$

が \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場 (\mathcal{D} - Θ NF-Hodge theater — cf. [10], Definition 4.6, (iii)) です。 \mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場の場合と同様に、 \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場が与えられますと、それからアルゴリズム的に、

$$\text{LabCusp}(\dagger \mathcal{D}^\circ) \xrightarrow{\sim} J$$

という全単射が構成されます。([10], Proposition 4.7, (iii), を参照ください。) この \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場が、宇宙際 Teichmüller 理論において、数体の多輻的な表示に関わるエタール的な大域的対象と局所的対象との関連を記述する概念です。また、 \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場の間の同型射 (の正確な定義は与えていませんが — [10], Definition 4.6, (iii), を参照ください — その) 全体のなす集合はただ 1 つの元からなります。([10], Proposition 4.8, (ii), を参照ください。)

この §21 の最後に、 \mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場と \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たした “対称性” の違いを観察しましょう。 \mathcal{D} - $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たす対称性は $\mathbb{F}_l^{\times \pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm$ であ

り, したがって, $\mathbb{F}_l^{\times\pm}$ という“加法的”な群による対称性です. 一方, \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場の構成で重要な役割を果たす対称性は $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ であり, したがって, \mathbb{F}_l^* という“乗法的”な群による対称性です. また, これら対称性の違いは, この“加法的/乗法的”に留まりません. \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の側の $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm$ は, $\text{Aut}_K(\underline{X}_K)$ という“幾何学的”な群の, \underline{X}_K のカスプのなす“幾何学的”な集合への作用から生じます. 一方, \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場の側の $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ は, $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ という“数論的”な群のある部分商の, \underline{C}_K のカスプの集合 — したがって, $\mathbb{V}^{\pm\text{un}}$ の $\text{Aut}(\underline{C}_K)$ 軌道という“数論的”な集合 (\mathcal{D} -NF 橋の定義を参照) — への作用から生じます:

$$\begin{array}{llll} (\mathcal{D}\text{-})\Theta^{\pm\text{ell}} \text{ Hodge 劇場} & \mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm & \mathbb{F}_l^{\times\pm}: \text{加法的} & \text{Aut}_K(\underline{X}_K): \text{幾何学的,} \\ (\mathcal{D}\text{-})\Theta\text{NF Hodge 劇場} & \mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp} & \mathbb{F}_l^*: \text{乗法的} & \text{Gal}(K/F_{\text{mod}}): \text{数論的.} \end{array}$$

これら Hodge 劇場を, LabCusp^\pm と LabCusp の間の適切な関係 “ $\text{LabCusp}^\pm \cong \mathbb{F}_l \supseteq \mathbb{F}_l^\times \rightarrow \mathbb{F}_l^* \cong \text{LabCusp}$ ” のもとで貼り合わせることによって得られる概念が, “ \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場” と呼ばれる概念です. (§26 で改めてこの概念の説明が与えられます.) したがって, 上述の観察から, その貼り合わせは, (ラベルの集合の観点ではなく) “対称性の出自” の観点から考えますと, 非従来の不思議な貼り合わせ ということになります:

$$\text{Aut}_K(\underline{X}_K) \text{ “} \longleftrightarrow \text{” } \text{Gal}(K/F_{\text{mod}}) \text{ の部分商.}$$

22 大域的フロベニオイド

§21 で説明を行った数体の多輻的な表示に関わるエタールの設定の上部構造であるフロベニオイドの設定の説明の準備として, この §22 では, 復元の対象となる数体 F_{mod} に関わるいくつかの大域的なフロベニオイドを紹介したいと思います.

§17 で仮定したとおり, K 上の双曲的軌道曲線 C_K は K コアであり, そして, F_{mod} は X のモジュライの体ですので, C_K を F_{mod} 上の双曲的軌道曲線に一意的に降下させることができます. それを $C_{F_{\text{mod}}}$ と書くことにしましょう. また, この $C_{F_{\text{mod}}}$ のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}})$ (とだいたい等価なデータ) を

$$\mathcal{D}^\circledast$$

と書くことにします. ([10], Example 5.1, (i), を参照ください.) したがって, 自然な有限次エタール被覆 $\underline{C}_K \rightarrow C_{F_{\text{mod}}}$ が定める射 $\mathcal{D}^\circledast \rightarrow \mathcal{D}^\circledast$ が存在することに注意しましょう. そして, S_{mod} を $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ の $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の作用による軌道体論的商とします ([10], Remark 3.1.5, を参照ください):

$$S_{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{Spec}(\mathcal{O}_K)/\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})].$$

§17 で与えた仮定 “有限次拡大 K/F_{mod} , F/F_{mod} が Galois である” によって, $\underline{q}_{\underline{E}}$ (したがって, その整数巾) が定める K 上の数論的直線束は, S_{mod} 上の数論的直線束に降下することに注意しましょう.

まず最初に紹介する

$$\mathcal{F}^\circledast$$

というフロベニオイドは, 以下の組のなす圏です ([10], Example 5.1, (ii), (iii), を参照ください):

\mathcal{D}^\circledast の対象, つまり, $C_{F_{\text{mod}}}$ の連結有限次エタール被覆と, その被覆の中での S_{mod} の正規化の上の数論的直線束の組.

(フロベニオイドなので、対象の間の射には、例えば Frobenius 次数 (Frobenius degree — cf. [6], Definition 1.1, (iii), (iv)) などといった概念に相当する部分も考えなければならないのですが、ここではそのような詳細は省略します。) そして、上の説明において、“ \mathcal{D}^\circledast の対象、つまり、 $C_{F_{\text{mod}}}$ の連結有限次エタール被覆” という部分を “ \mathcal{D}^\circledcirc の対象、つまり、 \underline{C}_K の連結有限次エタール被覆” に取り替えることで得られるフロベニオイドが

$$\mathcal{F}^\circledcirc$$

であり、その上、やはり上の \mathcal{F}^\circledast の説明において、“ \mathcal{D}^\circledast の対象、つまり、 $C_{F_{\text{mod}}}$ の連結有限次エタール被覆” という部分を “自明な被覆” に取り替えることで得られるフロベニオイドが

$$\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$$

です. ([10], Example 5.1, (iii), を参照ください.) したがって、“ $\mathcal{F}^\circledcirc \subseteq \mathcal{F}^\circledast \supseteq \mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ ” となり、また、

$$\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast \text{ は } S_{\text{mod}} \text{ の上の数論的直線束のなすフロベニオイド}$$

となります.

ここで、§8 に登場した 2 つの大域的フロベニオイド $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ について、もう少し詳しい説明を与えましょう. まず最初に、フロベニオイド $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ です. 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して、自然な射 $F_{\text{mod}}^\times \rightarrow K_{\underline{v}}^\times / \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^\times (\cong \mathbb{Z})$ を $\beta_{\underline{v}}$ と書くことにします. このとき、 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ の対象は、以下のような組 $(T, \{t_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}})$ となります:

F_{mod}^\times 上のトーサー T と、各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して、 $\beta_{\underline{v}}$ によって T の構造群を取り替えることによって得られる $K_{\underline{v}}^\times / \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}^\times$ 上のトーサー $T_{\underline{v}}$ の自明化 $t_{\underline{v}}$ の組.

次に、フロベニオイド $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ です. この圏の対象は、

各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する “分数イデアル” $\mathcal{J}_{\underline{v}} \subseteq K_{\underline{v}}$ の集まり $\{\mathcal{J}_{\underline{v}}\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}}$ であって、ほとんどすべての $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して $\mathcal{J}_{\underline{v}} = \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}$ となっているもの

です. すなわち、 $\mathcal{J}_{\underline{v}}$ は、 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が有限素点の場合、 $K_{\underline{v}}$ の有限生成非零部分 $\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}$ 加群であり、そして、 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ が無限素点の場合、単位閉円盤 $\mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}$ のある正の実数倍として得られる $K_{\underline{v}}$ の閉部分集合です.

$\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ の対象、つまり、 S_{mod} の上の数論的直線束が与えられますと、それを S_{mod} の生成点 (つまり、剰余体が F_{mod}^\times となる点) に制限することで、 F_{mod}^\times 上のトーサー T が得られます. しかも、その数論的直線束の各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ での整構造が “ $T_{\underline{v}}$ ” の自明化を定めますので、結果として、 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ の対象が得られます. そして、当たり前ですが、この対応はフロベニオイドの間の同型 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ を定めます. したがって、 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ というフロベニオイドは、 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ のある “具体的表示/解釈” を与えている、と考えることができます. しかも、§8 での説明のとおり、このようにして与えられる $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ の “具体的表示/解釈” は “乗法的な表示/解釈” です. 実際、 $\mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ の定義を思い出してみますと、そこには乗法的な情報しか登場しません. これにより、やはり §8 での説明のとおり、この “具体的表示/解釈” $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{MOD}}^\circledast$ は、

正則構造と両立しない結び付きが登場する設定においてもその有用性が期待できる $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ の “具体的表示/解釈”

となっています.

一方、 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ の対象が与えられますと、“ほとんどすべての $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して $\mathcal{J}_{\underline{v}} = \mathcal{O}_{K_{\underline{v}}}$ となっている” という仮定から、 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^\circledast$ の対象、つまり、 S_{mod} の上の数論的直線束が得られます. そして、再び当たり前ですが、こ

の対応はフロベニオイドの間の同型 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ を定めます. したがって, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ の場合と同様, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ というフロベニオイドも, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ のある “具体的表示/解釈” を与えている, と考えることができます. しかも, §8 での説明のとおり, このようにして与えられる $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ の “具体的表示/解釈” は “加群的な表示/解釈” であり, そして — 各 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する “ $\mathcal{J}_{\underline{v}}$ ” の体積を計算すれば対応する数論的直線束の次数が計算できるという事実から —

その対象である数論的直線の次数の計算に適した “具体的表示/解釈”

となっています.

最後に, $\mathcal{F}_{\text{mod}}^{\otimes}$ の実化 (realification — cf. [6], Proposition 5.3) である

$$\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}}$$

というフロベニオイドについて考えます. (この議論について, 詳しくは, [10], Example 3.5, (i), を参照ください.) 数論的因子とは, 各 $v \in \mathbb{V}_{\text{mod}}$ ($\xleftarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}} \ni \underline{v}$ に対応) での値群の直和 — すなわち, $\bigoplus_{v \in \mathbb{V}_{\text{mod}}} ((F_{\text{mod}})_v^{\times} / \mathcal{O}_{(F_{\text{mod}})_v}^{\times})$ — の元のことです. そして, よく知られているとおり, F_{mod} 上の任意の数論的直線束は, ある数論的因子から生じる数論的直線と同型になります. $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}}$ というフロベニオイドは, 大雑把には, 例えば $v \in \mathbb{V}_{\text{mod}}$ が有限素点の場合に着目すると, この値群たち “ $(F_{\text{mod}})_v^{\times} / \mathcal{O}_{(F_{\text{mod}})_v}^{\times} (\cong \mathbb{Z})$ ” を “実化” すること, つまり, “ $(F_{\text{mod}})_v^{\times} / \mathcal{O}_{(F_{\text{mod}})_v}^{\times} (\cong \mathbb{Z})$ ” を “ $((F_{\text{mod}})_v^{\times} / \mathcal{O}_{(F_{\text{mod}})_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} (\cong (K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} (\cong \mathbb{R}))$ ” に取り替えることによって発生する “実化された数論的直線束” をその対象とするフロベニオイドです. 各素点 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対して, $\mathcal{O}_{K_v}^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times} \subseteq K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times} \subseteq (K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ が定める $(K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} (\cong \mathbb{R})$ の “非負の部分 $\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ ” を $\mathcal{O}_{K_v}^{\times} \otimes \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq (K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ と書くことにしましょう. すると, フロベニオイドの研究によって, 抽象的な圏としての $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}}$ から, アルゴリズム的に, (値群たち $(K_v^{\times} / \mathcal{O}_{K_v}^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の添字集合として登場するような) “ $\underline{\mathbb{V}}$ ” に対応する集合や, この集合の元 “ $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ ” によって定まるモノイド “ $\mathcal{O}_{K_v}^{\times} \otimes \mathbb{R}_{\geq 0}$ ” に対応するモノイドが復元可能であることが知られています. そのようにして復元される “ $\underline{\mathbb{V}}$ ” に対応する集合を

$$\text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}})$$

と, $v \in \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}})$ に対するモノイド “ $\mathcal{O}_{K_v}^{\times} \otimes \mathbb{R}_{\geq 0}$ ” に対応するモノイドを

$$\Phi_{\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}}, v}$$

と書くことにしましょう.

23 Θ Hodge 劇場

ここで, まだ導入していなかった \mathcal{F}^+ 素点縞 (\mathcal{F}^+ -prime-strip — cf. [10], Definition 5.2, (ii)) という概念を導入します. $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ を有限素点, p を \underline{v} の剰余標数としましょう. $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{bad}}$ のときには, $G_{\underline{v}} \curvearrowright (\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} \times \underline{q}_{\underline{v}}^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times \underline{q}_{\underline{v}}^{\mathbb{N}})$ (とだいたい等価なデータとして定まる 分裂フロベニオイド (split Frobenioid — cf. [10], Example 3.2, (v))) を, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}^{\text{good}}$ のときには, $G_{\underline{v}} \curvearrowright (\overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^{\times} \times p^{\mathbb{N}} \supseteq \{1\} \times p^{\mathbb{N}})$ (とだいたい等価なデータとして定まる分裂フロベニオイド — [10], Example 3.3, (ii), を参照ください) を $\mathcal{F}_{\underline{v}}^+$ と書きます. そして, やはりこの “ $\mathcal{F}_{\underline{v}}^+$ ” には無限素点版もあり, それらをすべて集めてできる対象 $\{\mathcal{F}_{\underline{v}}^+\}_{\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}}$ の同型物を \mathcal{F}^+ 素点縞と呼びます.

$\dagger\mathfrak{F}^+ = \{\dagger\mathcal{F}_v^+\}_{v \in \mathbb{V}}$ を上で導入した \mathcal{F}^+ 素点縞としましょう。 v が有限素点の場合, $\dagger\mathcal{F}_v^+$ の Frobenius 的部分 (つまり, $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times \underline{q}^{\mathbb{N}}$ や $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times p^{\mathbb{N}}$ に対応するモノイド) から, アルゴリズム的に, “値群の実化 ($\cong \mathbb{R}$) の非負の部分 ($\cong \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$)” を $((\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times \underline{q}^{\mathbb{N}})/(\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times \{1\}))^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ や $((\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times p^{\mathbb{N}})/(\overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \times \{1\}))^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の部分集合として) 構成することができます。 また, $v \in \mathbb{V}$ が無限素点の場合にも, $\dagger\mathcal{F}_v^+$ から “値群 ($\cong \mathbb{R}$) の非負の部分 ($\cong \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$)” をアルゴリズム的に構成することができます。 このモノイド ($\cong \mathbb{R}_{\geq 0}$) を

$$\Phi_{\dagger\mathcal{F}_v^+}^{\text{rlf}}$$

と書くことにしましょう。

次に, \mathcal{F}^+ 素点縞 (\mathcal{F}^+ -prime-strip — cf. [10], Definition 5.2, (iv)) を 4 つ組 $(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}, \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}, \mathfrak{F}^+, \{\rho_v\}_{v \in \mathbb{V}})$ の同型物として定義しましょう。 ここで, $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}$ は §22 の後半で定義された実化された大域的フロベニオイド, $\text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}$ は自然な全単射, $\mathfrak{F}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{F}_v^+\}_{v \in \mathbb{V}}$ はこの §23 の冒頭で定義された対象を集めたもの, ρ_v は $\Phi_{\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}, v}$ と $\Phi_{\dagger\mathcal{F}_v^+}^{\text{rlf}}$ — ここで, $v \in \text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}$ によって $v \in \mathbb{V}$ に対応する元 — の間の自然な同型です。

次に, 各 $v \in \mathbb{V}$ に対して, $\underline{\mathcal{F}}_v$ というフロベニオイドを以下のようにして定義します。 $v \in \mathbb{V}^{\text{bad}}$ のときには (したがって $v \in \mathbb{V}$ は有限素点), $\underline{\mathcal{F}}_v$ を, §14 の後半で行った “エタールテータ関数のフロベニオイド的アプローチ” の説明に登場したフロベニオイド “ $\underline{\mathcal{F}}$ ” とします。 §14 でも述べたとおり, このフロベニオイドを (無理を承知で) “位相群作用付きモノイドの同型物” として記述するならば, “ $\Pi_v \curvearrowright \{ \text{適切な正整数 } i \text{ に対して } i \text{ 乗すれば, 零と極の因子が } X \text{ の普遍幾何学的アーベル緩和被覆上で定義されるような非零有理関数} \}$ ” となるでしょう。 また, $v \in \mathbb{V}^{\text{good}}$ のときには, $\underline{\mathcal{F}}_v$ を (§17 の最後の議論で既に導入した) \mathcal{F}_v とします。 ここで,

$\underline{\mathcal{F}}_v$ の同型物からアルゴリズム的に \mathcal{F}_v や \mathcal{F}_v^+ の同型物を構成することができる

という事実を 注意 します。 ([10], Examples 3.2, (iii), (vi); 3.3, (iii); 3.4, (ii), を参照ください。)

これらの準備のもと, Θ Hodge 劇場 (Θ -Hodge theater — cf. [10], Definition 3.6) を組 $(\{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}, \dagger\mathfrak{F}^+)$ として定義しましょう。 ここで, 各 $v \in \mathbb{V}$ に対して, $\dagger\underline{\mathcal{F}}_v$ はすぐ上で定義した $\underline{\mathcal{F}}_v$ の同型物であり — したがって, 直前の注意から, $\{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ というデータからアルゴリズム的に \mathcal{F}^+ 素点縞 $\dagger\mathfrak{F}^+$ が構成可能です — そして, $\dagger\mathfrak{F}^+$ は \mathcal{F}^+ 素点縞であって, その \mathcal{F}^+ 素点縞の部分 (つまり, “ \mathfrak{F}^+ ” に対応する部分) が, $\{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ というデータからアルゴリズム的に構成された \mathcal{F}^+ 素点縞 $\dagger\mathfrak{F}^+$ と一致しているものです。 その定義から,

Θ Hodge 劇場は, 局所的に定義されるテータ関数に関わるフロベニオイドたち “ $\{\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ ” と, 大域的に定義される数論的直線束に関わる (実化された) フロベニオイド “ $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger}$ ” との関連を記述する対象

と考えることができます。

次に, §21 で定義した \mathcal{D} - Θ 橋

$$\dagger\phi_{\ast}^{\Theta} = \{\dagger\phi_j^{\Theta}\}_{j \in J}: \dagger\mathcal{D}_J = \{\dagger\mathcal{D}_j\}_{j \in J} \rightarrow \dagger\mathcal{D}_{\ast}$$

が与えられたとします。 この §23 の最後に, この \mathcal{D} - Θ 橋を下部構造として持つ “ Θ 橋” を定義しましょう。

Θ 橋の定義のために, まず, 素点縞に対するある一般論を説明します。 ([10], Remark 5.3.1, を参照ください。) $\dagger\mathfrak{F}, \dagger\mathfrak{G}$ を \mathcal{F} 素点縞, $\dagger\mathcal{D}, \dagger\mathcal{D}^+$ をそれぞれ $\dagger\mathfrak{F}, \dagger\mathfrak{G}$ から定まる \mathcal{D} 素点縞, $\dagger\mathcal{D}^+, \dagger\mathcal{D}^{++}$ をそれぞれ $\dagger\mathcal{D}, \dagger\mathcal{D}^+$ から定まる \mathcal{D}^+ 素点縞とします。 そして, $\phi: \dagger\mathcal{D} \rightarrow \dagger\mathcal{D}^+$ を \mathcal{D} 素点縞の間の射であって, それが同型射 $\phi^{\dagger}: \dagger\mathcal{D}^+ \xrightarrow{\sim} \dagger\mathcal{D}^{++}$ を誘導するものであるとしましょう。 このとき, 以下の手続きによって, 射 ϕ を

\mathcal{F} 素点縞の間の射 $\psi: \dagger\mathfrak{F} \rightarrow \dagger\mathfrak{F}$ に拡張することができます: $v \in \mathbb{V}$ を有限素点; $\dagger\mathcal{F}_v \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)$, $\dagger\mathcal{F}_v \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)$ をそれぞれ $\dagger\mathfrak{F}$, $\dagger\mathfrak{F}$ の v 成分; $\dagger\mathcal{D}_v \stackrel{\text{def}}{=} \dagger\Pi_v$, $\dagger\mathcal{D}_v \stackrel{\text{def}}{=} \dagger\Pi_v$ をそれぞれ $\dagger\mathcal{D}$, $\dagger\mathcal{D}$ の v 成分, $\dagger\mathcal{D}_v^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \dagger G_v (\leftarrow \dagger\Pi_v)$, $\dagger\mathcal{D}_v^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \dagger G_v (\leftarrow \dagger\Pi_v)$ をそれぞれ $\dagger\mathcal{D}^\dagger$, $\dagger\mathcal{D}^\dagger$ の v 成分とします. つまり, ϕ の v 成分は射 $\dagger\Pi_v \rightarrow \dagger\Pi_v$ に対応して, そして, この射が同型射 $\dagger G_v \xrightarrow{\sim} \dagger G_v$ を誘導するものであることが仮定されています. これにより, $\dagger\Pi_v \rightarrow \dagger\Pi_v$ を用いて作用 $\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright$ を引き戻すことによって, 新しい“ \mathcal{F} 素点縞の v 成分” $\phi^*(\dagger\mathcal{F}_v) \stackrel{\text{def}}{=} (\dagger\Pi_v \curvearrowright \dagger\overline{\mathcal{O}}_v^\triangleright)$ が得られます. その上, 無限素点でも同様に“引き戻し”を考えることが可能であり, その結果, 新しい \mathcal{F} 素点縞 $\phi^*(\dagger\mathfrak{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi^*(\dagger\mathcal{F}_v)\}_{v \in \mathbb{V}}$ が得られます. このとき, 定義から, $\dagger\mathfrak{F}$ と $\phi^*(\dagger\mathfrak{F})$ の下部 \mathcal{D} 素点縞はどちらも“ $\dagger\mathcal{D}$ ”であり, 特に“同一”なので, (§20 で $\dagger\phi_\pm^{\Theta^\pm}$ から $\dagger\psi_\pm^{\Theta^\pm}$ を構成する際に適用した)“ \mathcal{F} 素点縞の間の同型のなす集合からその下部 \mathcal{D} 素点縞の間の同型のなす集合への自然な射は全単射”という事実から, $\dagger\mathcal{D}$ の恒等写像の“持ち上げ” $\dagger\mathfrak{F} \xrightarrow{\sim} \phi^*(\dagger\mathfrak{F})$ がただ 1 つ定まります. 最後に, この(同型)射 $\dagger\mathfrak{F} \xrightarrow{\sim} \phi^*(\dagger\mathfrak{F})$ と自然な射 $\phi^*(\dagger\mathfrak{F}) \rightarrow \dagger\mathfrak{F}$ の合成を考えることで, 所望の拡張 $\psi: \dagger\mathfrak{F} \rightarrow \dagger\mathfrak{F}$ が得られます.

さて, Θ 橋の定義を与えるために, $\dagger\mathfrak{F}_j$ ($j \in J$), $\dagger\mathfrak{F}_>$ を, その下部 \mathcal{D} 素点縞が $\dagger\mathcal{D}_j$, $\dagger\mathcal{D}_>$ となるような \mathcal{F} 素点縞としましょう. このとき, 各 $j \in J$ に対して, 上で与えた \mathcal{D} - Θ 橋 $\dagger\phi_*^\Theta$ の j 成分 $\dagger\phi_j^\Theta: \dagger\mathcal{D}_j \rightarrow \dagger\mathcal{D}_>$ は, “ j でラベル付けされた代入切断による多重射”(あるいは, “充満多重同型”)ですので, 特に, 下部 \mathcal{D}^\dagger 素点縞の多重同型 $(\dagger\phi_j^\Theta)^\dagger: \dagger\mathcal{D}_j^\dagger \xrightarrow{\sim} \dagger\mathcal{D}_>^\dagger$ を誘導します. したがって, 上で説明した一般論から, この j 成分 $\dagger\phi_j^\Theta: \dagger\mathcal{D}_j \rightarrow \dagger\mathcal{D}_>$ を \mathcal{F} 素点縞の多重射 $\dagger\psi_j^\Theta: \dagger\mathfrak{F}_j \rightarrow \dagger\mathfrak{F}_>$ に拡張することができます. この $\dagger\psi_j^\Theta$ を集めてできる多重射の集まり

$$\{\dagger\psi_j^\Theta\}_{j \in J}: \dagger\mathfrak{F}_J \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} \longrightarrow \dagger\mathfrak{F}_> \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\mathfrak{F}_>\}_{j \in J}$$

を

$$\dagger\psi_*^\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\psi_j^\Theta\}_{j \in J}$$

と書くことにしましょう. これにより, \mathcal{D} - Θ 橋 $\dagger\phi_*^\Theta$ を, フロベニオイドの関係 $\dagger\psi_*^\Theta$ に持ち上げることができました. 最後に, $\dagger\mathcal{HT}^\Theta \stackrel{\text{def}}{=} (\{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}, \dagger\mathfrak{F}^\dagger)$ を Θ Hodge 劇場であって, $\{\dagger\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ からアルゴリズム的に構成される \mathcal{F} 素点縞 (上で行った“ $\underline{\mathcal{F}}_v$ ”に関する議論の最後の注意を参照) が $\dagger\mathfrak{F}_>$ と一致するものとします. この関係を

$$\dagger\mathfrak{F}_> \dashrightarrow \dagger\mathcal{HT}^\Theta$$

と書きます. そして, \mathcal{D} - Θ 橋 $\dagger\phi_*^\Theta$ の上述の持ち上げ $\dagger\psi_*^\Theta$, 及び, $\dagger\mathfrak{F}_>$ と $\dagger\mathcal{HT}^\Theta$ の間のこの関係を並べたもの

$$\dagger\mathfrak{F}_J = \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\psi_*^\Theta} \dagger\mathfrak{F}_> \dashrightarrow \dagger\mathcal{HT}^\Theta$$

が, 所望の Θ 橋 (Θ -bridge — cf. [10], Definition 5.5, (ii)) です.

上で述べたとおり, Θ Hodge 劇場は, 局所的なフロベニオイドたち $\{\underline{\mathcal{F}}_v\}_{v \in \mathbb{V}}$ と大域的なフロベニオイド $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\dagger\Theta}$ との関連を記述する対象と考えることができます. そして,

Θ 橋は, その Θ Hodge 劇場と, 代入点のエタールの表示 (つまり, 代入切断) やそのラベル付けの乗法的管理の仕組み (つまり, $\dagger\phi_*^\Theta$ や $\dagger\psi_*^\Theta$) との関連を記述する対象

と考えることができます.

24 数体に関わる Kummer 理論

この §24 では、宇宙際 Teichmüller 理論における数体に関わる Kummer 理論についての説明を行いたいと思います。(詳しくは、[10], §5, を参照ください。)

まず最初に、数体に関わる Kummer 理論において重要な役割を果たす(そして、§11 の最後の議論に既にその名前が登場した) κ コア的, ${}_{\infty\kappa}$ コア的, ${}_{\infty\kappa\times}$ コアの関数という概念を簡単に説明しましょう。(この議論について、詳しくは、[10], Remark 3.1.7, を参照ください。) κ コアの関数とは、 $C_{F_{\text{mod}}}$, あるいは、 $C_{(F_{\text{mod}})_v}$ ($v \in \mathbb{V}_{\text{mod}}$) 上の適当な条件を満たす有理関数のことです。大域的な場合、つまり、 $C_{F_{\text{mod}}}$ 上の有理関数の場合のその定義を述べるならば、それは、次の 3 条件を満たす $C_{F_{\text{mod}}}$ 上の非零有理関数 f ということになります:

- f が定数でなければ、 f はただ 1 つの点で極を持ち、また、少なくとも 2 点で零を持つ。
- E の 2 等分点から定まる点では f は零も極も持たない。
- E の非自明な 2 等分点から定まる点での f の値は 1 の巾根となる。

このように、零や極、あるいは、特殊な点を代入して得られる値に関する適当な条件を満たす有理関数として、 κ コアの関数が定義されます。そして、 $C_{F_{\text{mod}}}$ の連結有限次 (エタールとは限らない) 被覆の上の有理関数であって、その正の巾が κ コアの関数 (の引き戻し) となるものを ${}_{\infty\kappa}$ コアの関数と呼び、また、 $C_{F_{\text{mod}}}$ の連結有限次 (エタールとは限らない) 被覆の上の有理関数であって、その定数倍が ${}_{\infty\kappa}$ コアの関数となるものを ${}_{\infty\kappa\times}$ コアの関数と呼びます。局所的な場合にも、つまり、 $C_{(F_{\text{mod}})_v}$ 上の有理関数の場合にも、上のそれと似た条件によって、 κ コアの関数, ${}_{\infty\kappa}$ コアの関数, ${}_{\infty\kappa\times}$ コアの関数という概念が定義されます。(κ コアの関数のなすモノイド, ${}_{\infty\kappa}$ コアの関数のなすモノイド, ${}_{\infty\kappa\times}$ コアの関数のなすモノイドの関係は、テータ関数の理論における — §16 の記号を用いれば — $\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$, ${}_{\infty}\underline{\theta}_{\text{env}}(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$, $(\overline{\mathcal{O}}^{\times} \cdot {}_{\infty}\underline{\theta}_{\text{env}})(\mathbb{M}_*^{\ominus}(\Pi_{\bullet}))$ の関係に相当します。)

この κ コアの関数の持つ重要な性質の 1 つは、

任意の元 $a \in F_{\text{mod}}^{\times}$ (または $\in \overline{F}^{\times}$; $\in (F_{\text{mod}})_v^{\times}$; $\in \overline{F}_v^{\times}$) に対して、 E の 2 等分点から生じない F_{mod} (または \overline{F} ; $(F_{\text{mod}})_v$; \overline{F}_v) 有理点 c と $C_{F_{\text{mod}}}$ (または $C_{F_{\text{mod}}}$; $C_{(F_{\text{mod}})_v}$; $C_{(F_{\text{mod}})_v}$) 上の κ コアの関数 f であって、 f の c での値が a となるようなものが存在する

という性質です。この性質により、(§11 の議論が要求するように) 様々な κ コアの関数に $C_{F_{\text{mod}}}$ の様々な点を代入することで、 F_{mod}^{\times} の任意の元を得ることができるのです。

以上の準備のもと、まず、Kummer 理論の大域的エタールの側面を考察しましょう。(この部分について、詳しくは、[10], Example 5.1, を参照ください。) 大域的エタールの対象である \mathcal{D}^{\ominus} の同型物 ${}^{\dagger}\mathcal{D}^{\ominus}$ を用意します。したがって、 ${}^{\dagger}\mathcal{D}^{\ominus}$ は $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_K)$ (とだいたい等価なデータ) の同型物です。このとき、遠アーベル幾何学の研究によって、

$$(a) \quad \pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_K) \hookrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \text{ の同型物 } {}^{\dagger}\mathcal{D}^{\ominus} \rightarrow {}^{\dagger}\mathcal{D}^{\ominus}$$

をアルゴリズム的に復元/構成することができます。(したがって、 ${}^{\dagger}\mathcal{D}^{\ominus}$ は §22 の “ \mathcal{D}^{\ominus} ” の同型物です。) また、 \underline{C}_K という双曲的軌道曲線は 狭義 Belyi 型 (of strictly Belyi type — cf. [8], Definition 3.5) という条件を満たすため、Belyi カスプ化 (Belyi cuspidalization — cf. [8], Example 3.6, Corollaries 3.7, 3.8) と

いう技術を適用することが可能であり、それによって、 $\dagger D^\circ \rightarrow \dagger D^*$ というデータからアルゴリズム的に以下の対象を復元/構成することができます:

(b) $C_{F_{\text{mod}}}$ の様々な点に付随する分解群 $\subseteq \pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}})$ に対応する $\dagger D^*$ に対する部分群.

(c) 位相群作用付き体 $\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \curvearrowright \bar{F}$ の同型物 $\dagger D^* \curvearrowright \bar{F}(\dagger D^\circ)$. (実際には “ $\dagger D^*$ ” などは群ではないので “ $\dagger D^* \curvearrowright \bar{F}(\dagger D^\circ)$ ” などといった表記は不適切なのですが、この §24 では、記号を増やさないために、“ $\dagger D^* \curvearrowright \bar{F}(\dagger D^\circ)$ ” のように、“ $\dagger D^*$ ” などに対して、まるでそれが群であるかのような表記を用いることとします.) したがって、体 $F_{\text{mod}} (= \bar{F}^{\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}})})$ の同型物 $F_{\text{mod}}(\dagger D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}(\dagger D^\circ)^{\dagger D^*}$.

(d) “ $\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \leftarrow (C_{F_{\text{mod}}}$ の関数体の絶対 Galois 群) $\curvearrowright (C_{F_{\text{mod}}}$ の関数体の代数閉包)” の同型物 $\dagger D^* \leftarrow \dagger D_{\text{rat}}^* \curvearrowright \bar{M}_{\text{rat}}(\dagger D^\circ) (\supseteq \bar{F}(\dagger D^\circ))$ と、Kummer 理論による自然な単射の同型物

$$(\bar{F}(\dagger D^\circ)^\times \hookrightarrow) \bar{M}_{\text{rat}}(\dagger D^\circ)^\times \hookrightarrow {}_\infty H^1(\dagger D_{\text{rat}}^*, \Lambda(\dagger D^*))$$

— ここで、 $\Lambda(\dagger D^*)$ は $\dagger D^*$ に対する §1 の (b) の円分物の群論版. (§1 の後半の議論も参照.)

さて、(c) によって、基礎体の代数閉包とそれへの基本群の作用が復元できているわけですから、そこから、以下の対象を、やはりアルゴリズム的に復元/構成することができます:

(e) \bar{F} の素点のなす集合 $(\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \curvearrowright) \mathbb{V}(\bar{F})$ の同型物 $\dagger D^* \curvearrowright \bar{\mathbb{V}}(\dagger D^\circ)$, したがって、それぞれ $\mathbb{V}(K)$, $\mathbb{V}_{\text{mod}}(\dagger D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbb{V}}(\dagger D^\circ)^{\dagger D^*}$, $\mathbb{V}_{\text{mod}}(\dagger D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbb{V}}(\dagger D^\circ)^{\dagger D^*}$.

(f) (§22 で導入した) フロベニオイド “ \mathcal{F}^* ” の同型物 $\mathcal{F}^*(\dagger D^\circ)$.

(g) (§22 で導入した) フロベニオイド “ \mathcal{F}^* ” の同型物 $\mathcal{F}^*(\dagger D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} “\mathcal{F}^*(\dagger D^\circ)|_{\dagger D^\circ}”$.

(h) (§22 で導入した) フロベニオイド “ $\mathcal{F}_{\text{mod}}^*$ ” の同型物 $\mathcal{F}_{\text{mod}}^*(\dagger D^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} “\mathcal{F}^*(\dagger D^\circ)|_{\dagger D^\circ}$ の終対象”.

また、(b) によって復元/構成された分解群を用いることで、(d) で復元された $C_{F_{\text{mod}}}$ の様々な連結有限次 (エタールとは限らない) 被覆の上の有理関数の様々な点への制限を考える — つまり、有理関数の様々な点での零や極や代入値を考える — ことができます. そのため、特に、

(i) κ コア的, ${}_\infty \kappa$ コア的, ${}_\infty \kappa \times$ コア的関数のなす部分モノイドの同型物 $\dagger D_{\text{rat}}^* \curvearrowright (M_\kappa^*(\dagger D^\circ) \subseteq M_{\infty \kappa}^*(\dagger D^\circ) \subseteq M_{\infty \kappa \times}^*(\dagger D^\circ)) (\subseteq \bar{M}_{\text{rat}}(\dagger D^\circ)^\times)$

を復元/構成することができます. (上で与えたこれらの概念の定義を参照.) (ここで、上で与えた定義から、 $M_\kappa^*(\dagger D^\circ) = M_{\infty \kappa}^*(\dagger D^\circ)^{\dagger D_{\text{rat}}^*}$ が成立することに注意しましょう.) 以上が、Kummer 理論の大域的エタールの側面に登場する概念です.

次に、Kummer 理論の大域的フロベニオイド的側面を考えてみましょう. (この部分について、詳しくは、[10], Example 5.1, を参照ください.) 大域的フロベニオイド “ \mathcal{F}^* ” “ \mathcal{F}^* ” の同型物 $\dagger \mathcal{F}^*$, $\dagger \mathcal{F}^*$ が与えられたとします. すると、フロベニオイドの研究から、

(j) \mathcal{F}^* , \mathcal{F}^* のそれぞれ下部圏 \mathcal{D}° , \mathcal{D}^* の同型物 $\dagger \mathcal{D}^\circ$, $\dagger \mathcal{D}^*$

を復元/構成することができます. したがって、上の (h) と同様の方法で、

(k) $\mathcal{F}_{\text{mod}}^*$ の同型物 $\dagger \mathcal{F}_{\text{mod}}^*$

も復元/構成することができます. ここで、更に、“ \mathcal{D}° ” と “ \mathcal{D}^* ” との間の自然な関係 “ $\mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathcal{D}^*$ ” (つまり、“ \mathcal{F}^* ” と “ \mathcal{F}^* ” との間の自然な関係 “ $\mathcal{F}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^*|_{\mathcal{D}^\circ}$ ”) の同型物 $\dagger \mathcal{D}^\circ \rightarrow \dagger \mathcal{D}^*$ も与えられているとしましょ

う. この関係は

$$\dagger\mathcal{F}^\circ \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^\otimes$$

という記号で表現されます.

$\dagger\mathcal{F}^\otimes$ は適当な数論的直線束たちのなすフロベニオイドの同型物ですので, その圏の対象たちの適切な (“有理化” された) 射の集まりを考えることで,

(l) $\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \curvearrowright \bar{F}^\times$ の同型物 $\dagger\mathcal{D}^\otimes \curvearrowright \bar{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$, したがって, $F_{\text{mod}}^\times (= (\bar{F}^\times)^{\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}})})$ の同型物 $F_{\text{mod}}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes)^{\dagger\mathcal{D}^\otimes}$.

を復元/構成することができます. その上, §22 での “ $\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}}$ ” の場合の “ $\text{Prime}(\mathcal{C}_{\text{mod}}^{\text{lt}})$ の復元” と同様, フロベニオイドの研究から,

(m) それぞれ \bar{F}, F_{mod} の素点のなす集合 $(\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \curvearrowright) \mathbb{V}(\bar{F}), \mathbb{V}_{\text{mod}}$ の同型物 $\dagger\mathcal{D}^\otimes \curvearrowright \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes), \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes)$.

が復元/構成されます.

ここで, 1 つ定義を与えます. (j) の $\dagger\mathcal{D}^\circ$ に対して (d) に関するアルゴリズムを適用することで, $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes$ という対象が得られます. したがって, “位相群 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes$ の作用付きのモノイド” といった対象を考察することは (我々の現時点での設定で) 可能です. そのようなある対象が, (i) の “ $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes \curvearrowright \mathbb{M}_{\infty\kappa}^\otimes(\dagger\mathcal{D}^\circ)$ ” (または (i) の “ $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes \curvearrowright \mathbb{M}_{\infty\kappa \times}^\otimes(\dagger\mathcal{D}^\circ)$ ”) の同型物となっているとき, それを, $\dagger\mathcal{F}^\otimes$ の $\infty\kappa$ コア構造 ($\infty\kappa$ -coric structure — cf. [10], Example 5.1, (v)) (または $\infty\kappa \times$ コア構造 ($\infty\kappa \times$ -coric structure — cf. [10], Example 5.1, (v))) と呼ぶことにしましょう. これまでの手続きによって,

どのような $\dagger\mathcal{F}^\otimes$ も少なくとも 1 つは $\infty\kappa$ コア構造 (または $\infty\kappa \times$ コア構造) を持つ

という事実がわかります. 以上が, Kummer 理論の大域的フロベニオイド的側面に登場する概念です.

次に, これまでに登場したエタールの/Frobenius 的概念を Kummer 理論で結び付けましょう. (この部分について, 詳しくは, [10], Example 5.1, を参照ください.) Kummer 理論の出発点はフロベニオイド的側面の出発点である

$$\dagger\mathcal{F}^\circ \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^\otimes$$

というデータと $\dagger\mathcal{F}^\otimes$ のある $\infty\kappa$ コア構造 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes \curvearrowright M$ です. M から定まる円分物, つまり, M に “ \varprojlim_n (n 倍写像の核)” を適用することで得られる $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes$ 加群を $\Lambda(M)$ と書くことにしましょう. (その定義から, 1 の巾根による定数関数は $\infty\kappa$ コア的関数であることに注意しましょう.) すると, §3 の前半で “ $G \curvearrowright M$ ” に対して行った構成と同様の構成によって, $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes$ 同変な単射

$$M \hookrightarrow \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes, \Lambda(M))$$

を構成することができます. また, (j) によって得られる対象 $\dagger\mathcal{D}^\circ$ に対して (i) に関するアルゴリズムを適用することで, $\dagger\mathcal{F}^\otimes$ の (別の) $\infty\kappa$ コア構造 (つまり, “エタールの $\infty\kappa$ コア構造”)

$$\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes \curvearrowright \mathbb{M}_{\infty\kappa}^\otimes(\dagger\mathcal{D}^\circ) (\subseteq \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes, \Lambda(\dagger\mathcal{D}^\circ)))$$

(“ \subseteq ” については (d) を参照) が得られます.

このとき,

$$\text{自然な単射 } \mathbb{Q} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ のもと, } \mathbb{Q}_{>0} \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{1\} \text{ が成立する}$$

という初等的な事実から、次の 円分剛性同型 が得られます:

ただ 1 つの $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}$ 同変同型 $\Lambda(M) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})$ が存在して、それが誘導する同型

$$\infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(M)) \xrightarrow{\sim} \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(\dagger\mathcal{D}^{\otimes}))$$

は、部分モノイドの間の同型

$$M \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{\infty\kappa}^{\otimes}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})$$

を定める.

この 円分剛性同型定理 によって、 $\infty\kappa$ コア構造に対する Kummer 同型

$$(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes} \curvearrowright M) \xrightarrow{\sim} (\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes} \curvearrowright \mathbb{M}_{\infty\kappa}^{\otimes}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes}))$$

が得られました. これまでの議論は “ $\infty\kappa$ コア構造” から始められましたが, “ $\infty\kappa\times$ コア構造” から出発しても、同様の Kummer 同型を得ることができます. また、この “Kummer 同型の存在” の帰結の 1 つは、そのような構造の一意性です. すなわち、上で観察した “構造の存在” と併せて、

どのような $\dagger\mathcal{F}^{\otimes}$ も、正準的な同型を除いてただ 1 つの $\infty\kappa$ コア構造 (または $\infty\kappa\times$ コア構造) を持つ

という結論が得られました.

次に、我々の設定に対して (l) に関するアルゴリズムを適用することで得られる対象 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes} \rightarrow \dagger\mathcal{D}^{\otimes} \curvearrowright \bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes})$ を考えましょう. これから定まる円分物、つまり、さきほど同様 “ $\varprojlim_n (n \text{ 倍写像の核})$ ” を適用することで得られる $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}$ 加群を、 $\Lambda(\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}))$ と書くことにします. すると、やはり上と同様に、Kummer 理論によって、 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}$ 同変な単射

$$\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \hookrightarrow \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes})))$$

が得られます. また、(j) によって得られる対象 $\dagger\mathcal{D}^{\otimes}$ に対して (c), (d) に関するアルゴリズムを適用することで、 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}$ 同変な単射

$$\bar{F}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})^{\times} \hookrightarrow \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(\dagger\mathcal{D}^{\otimes}))$$

が得られます. そして、上と同様に、次の 円分剛性同型 が得られます:

ただ 1 つの $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}$ 同変同型 $\Lambda(\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes})) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})$ が存在して、それが誘導する同型

$$\infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}))) \xrightarrow{\sim} \infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^{\otimes}, \Lambda(\dagger\mathcal{D}^{\otimes}))$$

は、部分モノイドの間の同型

$$\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} \bar{F}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})^{\times}, \quad F_{\text{mod}}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})^{\times}$$

を定める.

この 円分剛性同型定理 によって得られる Kummer 同型

$$\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} \bar{F}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})^{\times}, \quad F_{\text{mod}}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \xrightarrow{\sim} F_{\text{mod}}(\dagger\mathcal{D}^{\otimes})^{\times}$$

と、それぞれ右辺の体構造から、 $\bar{F}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \cup \{0\}$ や $F_{\text{mod}}^{\times}(\dagger\mathcal{F}^{\otimes}) \cup \{0\}$ に自然に体の構造が定まります. また、それにより、

(n) (e) による集合 $\mathbb{V}_{\text{mod}}(\dagger\mathcal{D}^\otimes)$ と (m) による集合 $\text{Prime}(\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes)$ の間の全単射 $\text{Prime}(\dagger\mathcal{F}_{\text{mod}}^\otimes) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}_{\text{mod}}(\dagger\mathcal{D}^\otimes)$

が得られます. 体 “ $\overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \cup \{0\}$ ” のある非 Archimedes 的付値に対応する $\mathfrak{p} \in \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ を固定しましょう. すると, 体 “ $\overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \cup \{0\}$ ” の \mathfrak{p} が定める付値による完備化の非零整数によるモノイドを考えて, また, $\dagger\mathcal{D}^\otimes \curvearrowright \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ の $\mathfrak{p} \in \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ の固定化部分群の — 遠アーベル幾何学の研究によって純群論的に特定可能な (詳しくは, [10], Example 5.4, (iv), の前半の議論を参照ください) — 適当な部分群を考えることによって,

(o) 適当な $\mathfrak{p} \in \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ から定まるある $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する “ $\mathcal{F}_{\underline{v}} = (\Pi_{\underline{v}} \curvearrowright \overline{\mathcal{O}}_{\underline{v}}^\triangleright)$ ” の同型物

が得られます. また, 体 “ $\overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \cup \{0\}$ ” のある Archimedes 的付値に対応する $\mathfrak{p} \in \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ の場合にも同様に,

(p) 適当な $\mathfrak{p} \in \text{Prime}(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$ から定まるある $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する “ $\mathcal{F}_{\underline{v}}$ ” の同型物

を構成することができます.

以上が数体の復元に関わる大域的な Kummer 理論です. “ κ 系関数の集まり” (つまり, “ κ 系構造”) を中心に考えますと, この §24 での議論は, 改めて, 以下のようにまとめられるでしょう:

- 2 つの大域的フロベニオイドとその間の関係

$$\dagger\mathcal{F}^\otimes \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^\otimes$$

が与えられたとする. このとき, (上で説明した 1 つ目の円分剛性同型の議論から) $\dagger\mathcal{F}^\otimes$ は正準的な同型を除いてただ 1 つの ${}_\infty\kappa$ コア構造 $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes \curvearrowright M_{\infty\kappa}$ を持つ. また, ((i) の直後の注意から) 部分集合 $M_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} M_{\infty\kappa}^{\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes} \subseteq M_{\infty\kappa}$ は, “ κ コアの関数のなすモノイド” の同型物となっている.

- (§3 の前半で “ $G \curvearrowright M$ ” に対して行った構成と同様の構成によって) $\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes$ 同変な単射

$$M_\kappa \hookrightarrow M_{\infty\kappa} \hookrightarrow {}_\infty H^1(\dagger\mathcal{D}_{\text{rat}}^\otimes, \Lambda(M_{\infty\kappa}))$$

が得られ, 特に, M_κ の元を適当なコホモロジー類 (の系) と見做すことができる.

• Belyi カスプ化によって ((b) のように) 得られる様々な分解群に, M_κ の元たちが定める適当なコホモロジー類 (の系) たちを制限することによって, $\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}}) \curvearrowright \overline{F}^\times$ の同型物 $\dagger\mathcal{D}^\otimes \curvearrowright \overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes)$, したがって, $F_{\text{mod}}^\times (= (\overline{F}^\times)^{\pi_1^{\text{ét}}(C_{F_{\text{mod}}})})$ の同型物 $F_{\text{mod}}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes)^{\dagger\mathcal{D}^\otimes}$ が復元/構成される. (この §24 の前半で述べた “ κ コアの関数の持つ重要な性質の 1 つ” を参照.)

- 初等的事実

“自然な単射 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のもと, $\mathbb{Q}_{>0} \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{1\}$ が成立する”

によって得られる円分剛性同型 $\Lambda(\overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes)) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\dagger\mathcal{D}^\otimes)$ から生じる Kummer 同型によって — エタール的な対象から構成された体たち $\overline{F}(\dagger\mathcal{D}^\otimes)$, $F_{\text{mod}}(\dagger\mathcal{D}^\otimes)$ と関連付けられながら — $\overline{F}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \cup \{0\}$ や $F_{\text{mod}}^\times(\dagger\mathcal{F}^\otimes) \cup \{0\}$ の体構造が復元/構成される.

その詳細は省略しますが, これまでに議論してきた “数体に関わる Kummer 理論” には, その局所版が存在します. その場合, エタールの側面の出発点は \mathcal{D} 素点編, フロベニオイドの側面の出発点は \mathcal{F} 素点編となり

ます. この場合にも, やはり同様に, エタールの/Frobenius 的な局所体をエタールの/Frobenius 的な “ κ 係数” と関連付けて復元することができます. (これについて, 詳しくは, [10], Definition 5.2, を参照ください.)

25 乗法的 Hodge 劇場

この §25 では, §21 で構成した D - Θ NF Hodge 劇場をその下部構造として持つ “ Θ NF Hodge 劇場” の説明を行います. §21 で解説した D - Θ NF Hodge 劇場は, 数体の多輻的な表示に関わるエタールのな大域の対象と局所の対象との関連を記述する概念でした. それによって確立されたエタールのな関連のもと, §24 で説明した数体の表示に関する大域的な Kummer 理論と局所的な Kummer 理論とを関連付ける概念が, この §25 で議論される Θ NF Hodge 劇場です.

§21 で定義した D -NF 橋

$$\dagger\phi_{\ast}^{\text{NF}} = \{\dagger\phi_j^{\text{NF}}\}_{j \in J} : \dagger\mathcal{D}_J = \{\dagger\mathcal{D}_j\}_{j \in J} \longrightarrow \dagger D^{\circ}$$

が与えられたとします. また, それに加えて, §24 で説明を行った “Kummer 理論の大域的フロベニオイド的側面” の出発点であった対象

$$\dagger\mathcal{F}^{\circ} \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\otimes}$$

であって, この $\dagger\mathcal{F}^{\circ}$ に §24 の (j) に関するアルゴリズムを適用することで得られる “ $\dagger D^{\circ}$ ” が上の D -NF 橋の右辺の $\dagger D^{\circ}$ と一致しているものも与えられているとしましょう.

次に, $\delta \in \text{LabCusp}(\dagger D^{\circ})$ を固定します. このとき, 当たり前ですが, この δ を (固定された初期 θ データの一部である) $\underline{\epsilon} \in \text{LabCusp}$ に移す同型 $\dagger D^{\circ} \xrightarrow{\sim} D^{\circ}$ のただ 1 つの $\text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(D^{\circ})$ 軌道 (つまり, ただ 1 つのある多重同型 $\dagger D^{\circ} \xrightarrow{\sim} D^{\circ}$) が存在します. §24 の (e) に関するアルゴリズムを適用することで得られる $\mathbb{V}(\dagger D^{\circ})$ の元であって, この多重同型 $\dagger D^{\circ} \xrightarrow{\sim} D^{\circ}$ による “像” が §21 で定義した $\underline{\mathbb{V}}^{\pm \text{un}}$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}_{\underline{\epsilon}}(D^{\circ}) \cdot \underline{\mathbb{V}}$) に属するものを δ 付値 (δ -valuation — cf. [10], Example 5.4, (iii)) と呼びます.

上で説明した “ δ 付値” という概念の定義には, “ D° ” という “ $\pi_1^{\text{ét}}(\underline{C}_K)$ のモデル” が登場しており, 一見, それは “内在的” ではありません. しかしながら, D -NF 橋の対称性から得られるカスプのラベルの集合に関する事実によって, 実際には, この概念は, 上で固定したような D -NF 橋のみから定義可能な — つまり, D -NF 橋に対して内在的な — 概念となっています. ([10], Example 5.4, (iii), を参照ください.)

この §25 の最初に与えた設定のもと, 与えられたデータ

$$\dagger\mathcal{F}^{\circ} \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\otimes}$$

に — (固定された δ に対する) 様々な δ 付値 $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ に対する — §24 の (o) や (p) に関するアルゴリズムを適用して得られる対象を集めることで, \mathcal{F} 素点縞が得られます. この \mathcal{F} 素点縞を

$$\dagger\mathcal{F}^{\circ}|_{\delta}$$

と書くことにします. ([10], Example 5.4, (iv), を参照ください.) ここで, 自然な射の合成 $\underline{\mathbb{V}}^{\pm \text{un}} \hookrightarrow \mathbb{V}(K) \twoheadrightarrow \mathbb{V}_{\text{mod}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{V}}$ は (定義から全射ですが) 単射ではないため — すなわち, $\underline{v} \in \underline{\mathbb{V}}$ の $\underline{\mathbb{V}}^{\pm \text{un}}$ への持ち上げの選択は一意的ではないため — この \mathcal{F} 素点縞 $\dagger\mathcal{F}^{\circ}|_{\delta}$ は 同型を除いてしか定まらないことに注意しましょう.

各 $j \in J$ に対して, その下部 \mathcal{D} 素点縞が $\dagger\mathcal{D}_j$ と一致する \mathcal{F} 素点縞 $\dagger\mathcal{F}_j$ を与えます. 上の構成のもと, 各 $j \in J$ に対して, 以下の条件を満たす $\delta_j \in \text{LabCusp}(\dagger D^{\circ})$ がただ 1 つ存在します: 与えられた D -NF 橋

$\dagger\phi_{\ast}^{\text{NF}}$ の j 成分 $\dagger\phi_j^{\text{NF}}$ の“像”に入る $\mathbb{V}(\dagger\mathcal{D}^{\circ})$ の元はすべて δ_j 付値になる. (詳しくは, [10], Example 5.4, (iii), の議論を参照ください.) このような状況のとき, 充満多重同型 $\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} \dagger\mathcal{F}^{\circ}|_{\delta_j}$ に

$$\dagger\psi_j^{\text{NF}} : \dagger\mathfrak{F}_j \longrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}$$

という記号を用いて, また, それを集めてできる対象に

$$\dagger\psi_{\ast}^{\text{NF}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\psi_j^{\text{NF}}\}_{j \in J} : \dagger\mathfrak{F}_J \stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} \longrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ} \left(\stackrel{\text{def}}{=} \{\dagger\psi_j^{\text{NF}} : \dagger\mathfrak{F}_j \longrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}\}_{j \in J} \right)$$

という記号を用いましょう. この $\dagger\psi_{\ast}^{\text{NF}}$ と, 最初に与えた $\dagger\mathcal{F}^{\circ}$ と $\dagger\mathcal{F}^{\circ}$ の関係を並べて得られる

$$\dagger\mathfrak{F}_J = \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\psi_{\ast}^{\text{NF}}} \dagger\mathcal{F}^{\circ} \dashrightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}$$

を NF 橋 (NF-bridge — cf. [10], Definition 5.5, (i)) と呼びます.

ここで定義を与えた $\dagger\psi_{\ast}^{\text{NF}}$ の j 成分 $\dagger\psi_j^{\text{NF}} : \dagger\mathfrak{F}_j \rightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}$, つまり, 充満多重同型 $\dagger\mathfrak{F}_j \xrightarrow{\sim} \dagger\mathcal{F}^{\circ}|_{\delta_j}$ は, “充満多重同型” ですので, 特に, 上で与えた注意 “ $\dagger\mathcal{F}^{\circ}|_{\delta_j}$ は同型を除いてしか定まらない” は, 我々のこの定義に問題を引き起こしません. また, 構成から, この j 成分 $\dagger\psi_j^{\text{NF}} : \dagger\mathfrak{F}_j \rightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}$ は, (局所的な場合のその説明は省略しましたが) §24 で考察を行った “ κ 系構造” と両立的となります. つまり,

$\dagger\psi_j^{\text{NF}} : \dagger\mathfrak{F}_j \rightarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ}$ において, 左辺に関わる局所的な “ κ 系構造”, 及び, それに関わる Kummer 理論と, 右辺に関わる大域的な “ κ 系構造”, 及び, それに関わる Kummer 理論は両立的

となっています. ([10], Example 5.4, (iv), を参照ください.) つまり, NF 橋という概念によって, §24 で考察を行った “大域的な設定による数体の復元やそれに対する Kummer 理論” と (§24 では説明を省略した) “局所的な設定による局所体の復元やそれに対する Kummer 理論” が, 直接的に関連付けられるのです.

最後に, $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場の場合と同様, §23 で定義した Θ 橋とさきほど定義した NF 橋を並べてできる対象

$$\dagger\mathcal{F}^{\circ} \dashleftarrow \dagger\mathcal{F}^{\circ} \xleftarrow{\dagger\psi_{\ast}^{\text{NF}}} \dagger\mathfrak{F}_J = \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\psi_{\ast}^{\circ}} \dagger\mathfrak{F}_{\triangleright} \dashrightarrow \dagger\mathcal{H}T^{\Theta}$$

が ΘNF Hodge 劇場 (ΘNF -Hodge theater — cf. [10], Definition 5.5, (iii)) です.

26 Hodge 劇場と対数リンク

§20 で構成した \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場

$$\dagger\mathcal{D}_{\triangleright} \xleftarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\circ\pm}} \dagger\mathcal{D}_T = \{\dagger\mathcal{D}_t\}_{t \in T} \xrightarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\circ\text{ell}}} \dagger\mathcal{D}^{\circ\pm}$$

を思い出しましょう. これは, $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \cong \text{Aut}_K(\underline{X}_K)$ という加法的/幾何学的な群による対称性が支配する, テータ関数やその特殊値を適切に記述するための設定でした. 一方, §21 で構成した \mathcal{D} - ΘNF Hodge 劇場

$$\dagger\mathcal{D}^{\circ} \xleftarrow{\dagger\phi_{\ast}^{\text{NF}}} \dagger\mathcal{D}_J = \{\dagger\mathcal{D}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\phi_{\ast}^{\circ}} \dagger\mathcal{D}_{\triangleright}$$

は, $\text{Gal}(K/F_{\text{mod}})$ の部分商として生じる \mathbb{F}_l^{\times} という乗法的/数論的な群による対称性が支配する, 数体それ自体や数体とテータ関数の特殊値の関連付けを適切に記述するための設定でした. 上記 2 つのタイプの Hodge 劇場が与えられたとしましょう. これらを (§18 で論じた) LabCusp^{\pm} と LabCusp との間の適切な関係をも

とに貼り合わせることで得られる対象が $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF Hodge 劇場}$ ($\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF-Hodge theater}$ — cf. [10], Definition 6.13, (ii)) です. つまり, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF Hodge 劇場}$ とは, 上の $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場, $\mathcal{D}\text{-}\Theta\text{NF Hodge 劇場}$, そしてそれらの間の, 以下のようにして定義される “貼り合わせ同型” の 3 つ組のことです:

$$\begin{array}{ccc} \dagger\mathcal{D}_{\succ} & \xleftarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}} & \dagger\mathcal{D}_T = \{\dagger\mathcal{D}_t\}_{t \in T} & \xrightarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}} & \dagger\mathcal{D}^{\Theta^{\pm}} \\ & & \downarrow \text{glue} & & \\ \dagger\mathcal{D}_{\succ} & \xleftarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\Theta}} & \dagger\mathcal{D}_J = \{\dagger\mathcal{D}_j\}_{j \in J} & \xrightarrow{\dagger\phi_{\pm}^{\text{NF}}} & \dagger\mathcal{D}^{\Theta}. \end{array}$$

各 $t \in T \setminus \{0\}$ に対して, $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm}$ 橋を用いた同型

$$\dagger\mathcal{D}_t \xrightarrow{\dagger\phi_t^{\Theta^{\pm}}} \dagger\mathcal{D}_{\succ} \xrightarrow{(\dagger\phi_{-t}^{\Theta^{\pm}})^{-1}} \dagger\mathcal{D}_{-t}$$

によって, $\dagger\mathcal{D}_t$ と $\dagger\mathcal{D}_{-t}$ を同一視して, それを $\dagger\mathcal{D}_{|t|}$ と書く. また, 同型

$$\dagger\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\dagger\phi_0^{\Theta^{\pm}}} \dagger\mathcal{D}_{\succ}$$

によって, $\dagger\mathcal{D}_0$ と $\dagger\mathcal{D}_{\succ}$ を同一視して, それを $\dagger\mathcal{D}_{|0|}$ と書く. そして,

$$T^* \stackrel{\text{def}}{=} (T \setminus \{0\}) / \{\pm 1\}$$

と書く. これにより, $\dagger\mathcal{D}_{T^*} = \{\dagger\mathcal{D}_{|t|}\}_{|t| \in T^*}$ という \mathcal{D} 素点縞の集まりと, $\dagger\mathcal{D}_{|0|}$ という \mathcal{D} 素点縞が得られる. 次に, これまで何度か用いられてきた事実 “代入点に付随する分解群は遠アーベル幾何学によって復元可能” という事実から, この $\dagger\mathcal{D}_{T^*} = \{\dagger\mathcal{D}_{|t|}\}_{|t| \in T^*}$ から $\dagger\mathcal{D}_{|0|}$ への $\mathcal{D}\text{-}\Theta$ 橋をアルゴリズム的に構成することができる:

$$\dagger\phi_{\pm}^{\Theta}(\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}): \dagger\mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \dagger\mathcal{D}_{|0|}.$$

([10], Proposition 6.7, を参照ください.) この新しい $\mathcal{D}\text{-}\Theta$ 橋 $\dagger\phi_{\pm}^{\Theta}(\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}})$ と元々の $\mathcal{D}\text{-}\Theta$ 橋 $\dagger\phi_{\pm}^{\Theta}$ の間の同型が, “貼り合わせ同型” の内容である. ([10], Remark 6.12.2, を参照ください.)

この “貼り合わせ同型” によって, 結果として, $\dagger\mathcal{D}_0$, $\dagger\mathcal{D}_{\succ}$, $\dagger\mathcal{D}_{\succ}$ が同一視されることとなります. また, §21 の最後の部分で述べたとおり, この “貼り合わせ同型” は, (ラベルの集合 LabCusp^{\pm} , LabCusp の観点からは非常に “自然” なものですが) それぞれ Hodge 劇場に働いている対称性 $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm}$, $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ の “出自” の観点から考えますと, 非常に不思議な概念であることがわかつてと思います.

次に, §20 で構成した $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場

$$\dagger\mathcal{F}_{\succ} \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}} \dagger\mathcal{F}_T = \{\dagger\mathcal{F}_t\}_{t \in T} \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}} \dagger\mathcal{D}^{\Theta^{\pm}}$$

と §25 で構成した $\Theta\text{NF Hodge 劇場}$

$$\dagger\mathcal{F}^{\Theta} \leftarrow \dagger\mathcal{F}^{\Theta} \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\text{NF}}} \dagger\mathcal{F}_J = \{\dagger\mathcal{F}_j\}_{j \in J} \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta}} \dagger\mathcal{F}_{\succ} \dashrightarrow \dagger\mathcal{HT}^{\Theta}$$

が与えられたとしましょう. “前者の下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場と後者の下部 $\mathcal{D}\text{-}\Theta\text{NF Hodge 劇場}$ の間の貼り合わせ同型” は, 上述の説明のとおり, 様々な \mathcal{D} 素点縞の間の多重同型から構成されるものです. したがって,

(§20 で $\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ から $\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ を構成する際に適用した) “ \mathcal{F} 素点縞の間の同型のなす集合からその下部 \mathcal{D} 素点縞の間の同型のなす集合への自然な射は全単射” という事実によって, それらの \mathcal{D} 素点縞の間の多重同型は, 上部構造の \mathcal{F} 素点縞の間の多重同型の “系” を一意的に定めます. ここで, このようにして得られる \mathcal{F} 素点縞の間の多重同型の “系” を, 与えられた $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場と ΘNF Hodge 劇場の間の “貼り合わせ同型” と呼びます. ([10], Remark 6.12.2, を参照ください.) そして, $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場と ΘNF Hodge 劇場とそれらの間の “貼り合わせ同型” の 3 つ組のことを $\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場 ($\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ -Hodge theater — cf. [10], Definition 6.13, (i)) と呼びます:

$$\begin{array}{ccccccc} \dagger\mathfrak{F}_{>} & \xleftarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}} & \dagger\mathfrak{F}_T = \{\dagger\mathfrak{F}_t\}_{t \in T} & \xrightarrow{\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\text{ell}}}} & \dagger\mathcal{D}^{\Theta^{\pm}} & & \\ & & \downarrow \text{glue} & & & & \\ \dagger\mathcal{H}T^{\Theta} & \leftarrow \dagger\mathfrak{F}_{>} & \xleftarrow{\dagger\psi_{*}^{\Theta}} & \dagger\mathfrak{F}_J = \{\dagger\mathfrak{F}_j\}_{j \in J} & \xrightarrow{\dagger\psi_{*}^{\text{NF}}} & \dagger\mathcal{F}^{\Theta} & \rightarrow \dagger\mathcal{F}^{\Theta}. \end{array}$$

$\dagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$, $\ddagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ を $\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場, $\dagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$, $\ddagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ をそれぞれその下部 $\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場としましょう. $\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}$ Hodge 劇場の間の同型 $\exists: \dagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ が与えられますと, 再び (§20 で $\dagger\phi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ から $\dagger\psi_{\pm}^{\Theta^{\pm}}$ を構成する際に適用した) “ \mathcal{F} 素点縞の間の同型のなす集合からその下部 \mathcal{D} 素点縞の間の同型のなす集合への自然な射は全単射” という事実によって, \exists が誘導する様々な \mathcal{D} 素点縞の間の同型 $\dagger\mathfrak{D}_{\square} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathfrak{D}_{\square}$ — ここで, $\square \in T \cup J \cup \{>\} \cup \{>\}$ — は, 様々な \mathcal{F} 素点縞の間の同型 $\log(\dagger\mathfrak{F}_{\square}) \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathfrak{F}_{\square}$ — ここで, “ $\log(\dagger\mathfrak{F}_{\square})$ ” という記号については, §9 を参照 — を一意的に定めます. この様々な同型たち $\{\log(\dagger\mathfrak{F}_{\square}) \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathfrak{F}_{\square}\}_{\square \in T \cup J \cup \{>\} \cup \{>\}}$ をその内容とするリンクを “ \exists によって定まる対数リンク” と呼びます. そして, $\{\exists$ によって定まる対数リンク $\}$ — ここで, \exists はすべての同型 $\dagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\sim} \ddagger\mathcal{H}T^{\mathcal{D}-\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ を走る — を, $\dagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ と $\ddagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$ の間の対数リンクと呼び, それを,

$$\dagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \ddagger\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}}$$

という記号で表現します. ([12], Proposition 1.3, (i), を参照ください.) これが, §9 (や §10) で議論した “対数リンク” の (実際に宇宙際 Teichmüller 理論で用いられる) “Hodge 劇場版” です. §9 や §10 で議論したとおり, この対数リンクの無限列

$$\dots \xrightarrow{\log} \dagger_{-1}\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_0\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dagger_1\mathcal{H}T^{\Theta^{\pm\text{ell}}\text{NF}} \xrightarrow{\log} \dots$$

を考えて, この無限列から生じる対数 Kummer 対応を考察することになります.

27 まとめ

最後に, 本稿で行われた議論を, 後半で説明した “Hodge 劇場の構成” の観点からまとめて, 本稿を終えましょう:

- ある Diophantus 幾何学的定理 を証明するためには,

- (a) 対数殻
- (b) 楕円曲線の q パラメータの (1 より大きい) ある有理数による巾
- (c) 数体

という 3 つの対象の (ある適切な設定における) 多輻的な表示 の存在を証明すれば充分である. (§4 から §8 の議論や §12 の議論の一部を参照.)

- (b) と (c) の多輻的な表示を得るためには、正則構造から単解構造への移行によって生じる不定性から、(b) と (c) を防護/隔離しなければならない。そのために、(b) と (c) を、“ただの数”としてではなく“ある適切な関数の特殊値”として扱う。そのような関数として、(b) に対してテータ関数、(c) に対して“ κ 系関数”が用いられる。(§11 の議論を参照.)

- テータ関数に代入すべき点たちの内、我々の議論において重要となるものは、 $\text{LabCusp}^\pm \cong \mathbb{F}_l$ という集合の元たちで自然にラベル付けされる。 $j \in \mathbb{F}_l$ に対して、 j でラベル付けされた点でのテータ関数の値は — $\mathbb{F}_l = \{-l^*, \dots, 0, \dots, l^*\}$ という自然な同一視のもと — “ $\mu_{2l} \cdot q^{j^2/2l}$ ” の元となる。(§13 や §18 や §19 の議論を参照.)

- 上述の各 $j \in \mathbb{F}_l$ での特殊値に関する考察から、 $\mathbb{F}_l^\times = \mathbb{F}_l \setminus \{0\}$ でラベル付けされた点での特殊値によって (b) が得られ、そして、 $0 \in \mathbb{F}_l$ でラベル付けされた点での代入によってある単数的加群 “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu}$ ” が得られることがわかる。この単数的加群は、後に、対数写像 “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times \mu} \xrightarrow{\sim} (\overline{F}_v)_+$ ” を通じて、(b) (や (c)) に対する適切な“入れ物”としての (a) となる。(§19 や §20 の議論や §8 や §9 の議論の一部を参照.)

- 考察しなければならない様々な局所的な状況におけるテータ関数の特殊値や代入点を大域的に管理するために、局所的な設定と大域的な設定とを関連付けなければならない。(§19 の議論を参照.)

- また、上述のように、 $\mathbb{F}_l^\times = \mathbb{F}_l \setminus \{0\}$ の元での特殊値として得られる (b) を、 $0 \in \mathbb{F}_l$ での代入によって得られる適切な“入れ物”に収納したい — つまり、 \mathbb{F}_l^\times の元と $\{0\}$ の元を関連付けたい。そのために、 $\text{Aut}_K(X_K)$ から生じる $\mathbb{F}_l^{\times \pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^\pm$ という加法的/幾何学的な対称性をもとに、局所的な設定と大域的な設定との関連付けを行う。これらの結果として構成される概念が、 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場である。(§20 の議論を参照.)

- 上述の説明から、非常に大雑把なレベルでは、 $\mathcal{D}\text{-}\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場は、

テータ関数、その代入点のラベルの管理、及び、その特殊値 (つまり、(b)) のための“入れ物” (つまり、最終的には (a) となるもの)

のための設定だと考えられる。

- (c) の多輻的な表示は、 $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場による $\mathbb{F}_l^{\times \pm}$ 対称性を用いたラベルの管理を破壊してしまわないようなラベルの管理のもとで実現しなければならない。そして、 $\Theta^{\pm \text{ell}}$ Hodge 劇場の大域的な部分に現れる数体が、多輻的に表示されるべき (c) よりも大きくなってしまいうため、そのラベルの管理は、数体のこの拡大の降下情報に関連するものでなければならない。また、(c) は最終的に“値群的”かつ“輻的”な対象となるため、そのラベルの管理は、“単数的”かつ“コア的”なラベルである“ $0 \in \mathbb{F}_l$ ”を隔離する形で与えられなければならない。(§21 の議論を参照.)

- テータ関数の非単数的特殊値は、 $\text{LabCusp} \cong \mathbb{F}_l^*$ という集合の元たちで自然にラベル付けされる。また、このラベルの集合に関する対称性 $\mathbb{F}_l^* \curvearrowright \text{LabCusp}$ は、数体の降下情報に関連する。この乗法的/数論的な \mathbb{F}_l^* 対称性をもとにした、数体やその上の数論的直線束たちと、テータ関数の代入点との間の適切なエタールの関連付けが、 $\mathcal{D}\text{-}\Theta\text{NF}$ Hodge 劇場という概念で実現される。(§18 や §21 の議論を参照.)

- それぞれ大域的な設定、局所的な設定における数体やその完備化たちの復元、及び、それらに対する Kummer 理論と両立する形で、上述のエタールの関連付けをフロベニオイドのレベルに持ち上げ、そして、その上、それら数体に関わる設定とテータ関数に関わる局所的なフロベニオイドとを適切に関連付けることで得

られる概念が Θ NF Hodge 劇場という概念である. (§24 や §25 の議論を参照.)

- 上述の説明から, 非常に大雑把なレベルでは, \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場や Θ NF Hodge 劇場 は,

(c) の多輻的な表示, 及び,

- その (c) と
- (\mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場におけるテータ関数への“代入”という操作を行うことによって得られる) (a) や (b) と

の間の関連付け

のための設定だと考えられる.

- 加法的/幾何学的な対称性 $\mathbb{F}_l^{\times\pm} \curvearrowright \text{LabCusp}^{\pm}$ をもとに構成された \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場や $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場と, 乗法的/数論的な対称性 $\mathbb{F}_l^{\times*} \curvearrowright \text{LabCusp}$ をもとに構成された \mathcal{D} - Θ NF Hodge 劇場や Θ NF Hodge 劇場を (対称性の出自の観点からは“非従来のな形”で) 貼り合わせることで得られる概念が, \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場や $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場である. (§26 の議論を参照.)

- 2 つの $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場を — それぞれの下部 \mathcal{D} - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場の間の同型のもと — 部品である様々な Frobenius 的 “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ ” の間の (無限素点の場合の説明は省略, 有限素点の場合には) “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \supseteq \overline{\mathcal{O}}_v^{\times} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu} = \tilde{F}_v \supseteq \tilde{\mathcal{O}}_v^{\triangleright} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}}_v^{\triangleright}$ ” という関係で貼り合わせることによって得られる結び付きが, 対数リンクである. (§9 や §26 の議論を参照.)

- 対数リンクによって, 単数的乗法的加群 “ $\overline{\mathcal{O}}_v^{\times\mu}$ ” を, (a) というコンパクトな加法的加群に変換することができる. しかも, それは (b) や (c) の“入れ物”となる. (§8 や §9 の議論を参照.)

- 一方, “対数写像は正則構造に依存する”という事実によって, (単一の) 対数リンクによる直前の (a) という“入れ物”は, 正則構造と両立しないリンクに対する両立性を持たない. この問題を回避するために, 対数リンクの無限列から生じる“Frobenius 的対数殻の対数写像による関係の無限列とそれぞれ Frobenius 的対数殻とエタールの対数殻の間の Kummer 同型”の総体である, 対数 Kummer 対応 を考えなければならない. (§9 や §10 の議論を参照.)

- エタールの部分の不定性や対数殻の Kummer 同型に付加されてしまう不定性によって, (a) の多輻的な表示を得るためには, (a) に対するそれぞれ (Ind_1) , (Ind_2) という不定性を許容しなければならない. また, さきほどの対数 Kummer 対応が上半両立性を満たすことしか確認することができないという事実によって, (a) の多輻的な表示を得るためには, (a) に対する (Ind_3) という不定性を許容しなければならない. (§10 の議論を参照.)

- これまで考察/構成を行ってきた様々な概念を用いることで, (Ind_1) , (Ind_2) , (Ind_3) という不定性のもと, (ある適切な設定において)

(a) 対数殻 (b) 楕円曲線の q パラメータの (1 より大きい) ある有理数による巾 (c) 数体

を多輻的に表示することができる.

参考文献

- [1] 星 裕一郎, 絶対 Galois 群による数体の復元, 第 18 回早稲田大学整数論研究集会報告集.
- [2] S. Mochizuki, A survey of the Hodge-Arakelov theory of elliptic curves. I, *Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999)*, 533-569, Proc. Sympos. Pure Math., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [3] S. Mochizuki, A survey of the Hodge-Arakelov theory of elliptic curves. II, *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, 81-114, Adv. Stud. Pure Math., **36**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [4] S. Mochizuki, The absolute anabelian geometry of hyperbolic curves, *Galois theory and modular forms*, 77-122, Dev. Math., **11**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004.
- [5] S. Mochizuki, The absolute anabelian geometry of canonical curves, *Kazuya Kato's fiftieth birthday. Doc. Math.* 2003, Extra Vol., 609-640 (electronic).
- [6] S. Mochizuki, The geometry of Frobenioids I. The general theory, *Kyushu J. Math.* **62** (2008), no. **2**, 293-400.
- [7] S. Mochizuki, The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. **1**, 227-349.
- [8] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry II: decomposition groups and endomorphisms, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **20** (2013), no. **2**, 171-269.
- [9] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry III: Global reconstruction algorithms, to appear in *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*.
- [10] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmuller Theory I: Construction of Hodge Theaters*, RIMS Preprint **1756** (August 2012).
- [11] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmuller Theory II: Hodge-Arakelov-theoretic Evaluation*, RIMS Preprint **1757** (August 2012).
- [12] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmuller Theory III: Splittings of the Log-theta-lattice*, RIMS Preprint **1758** (August 2012).
- [13] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmuller Theory IV: Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations*, RIMS Preprint **1759** (August 2012).

[10], [11], [12], [13] の最新版は,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mochizuki/papers-japanese.html>

を参照ください.

索引

- Aut 正則空間 (Aut-holomorphic space), 54
- Belyi カスプ化 (Belyi cuspidalization), 71
- Frobenius 次数 (Frobenius degree), 66
Frobenius 的 (Frobenius-like), 7
- Galois 代入 (Galois evaluation), 35
- Kummer 同型 (Kummer isomorphism), 9
Kummer 離脱不定性 (Kummer-detachment indeterminacy), 10
 k コア (k -core), 37
- NF 橋 (NF-bridge), 76
- q 標対象 (q -pilot object), 35
- D 素点縞 (D -prime-strip), 19
 D^+ 素点縞 (D^+ -prime-strip), 19
 D -NF 橋 (D -NF-bridge), 64
 D - Θ 橋 (D - Θ -bridge), 65
 D - Θ^{ell} 橋 (D - Θ^{ell} -bridge), 60
 D - Θ^{\pm} 橋 (D - Θ^{\pm} -bridge), 60
 D - Θ NF Hodge 劇場 (D - Θ NF-Hodge theater), 65
 D - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場 (D - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ -Hodge theater), 60
 D - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場 (D - $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF-Hodge theater), 77
- \mathcal{F} 素点縞 (\mathcal{F} -prime-strip), 19
 \mathcal{F}^+ 素点縞 (\mathcal{F}^+ -prime-strip), 68
 $\mathcal{F}^+\times$ 素点縞 ($\mathcal{F}^+\times$ -prime-strip), 19
 $\mathcal{F}^+\times\mu$ 素点縞 ($\mathcal{F}^+\times\mu$ -prime-strip), 19
 \mathcal{F}^{tr} 素点縞 (\mathcal{F}^{tr} -prime-strip), 68
- \mathbb{F}_l^{\pm} 群 (\mathbb{F}_l^{\pm} -group), 51
- δ 付値 (δ -valuation), 76
- κ コアの (κ -coric), 33
 $\infty\kappa$ コアの ($\infty\kappa$ -coric), 33
 $\infty\kappa$ コア構造 ($\infty\kappa$ -coric structure), 72
 $\infty\kappa\times$ コアの ($\infty\kappa\times$ -coric), 33
 $\infty\kappa\times$ コア構造 ($\infty\kappa\times$ -coric structure), 72
- Θ 橋 (Θ -bridge), 70
 Θ^{ell} 橋 (Θ^{ell} -bridge), 61
 Θ^{\pm} 橋 (Θ^{\pm} -bridge), 62
 Θ 標対象 (Θ -pilot object), 35
 Θ Hodge 劇場 (Θ -Hodge theater), 69
 Θ NF Hodge 劇場 (Θ NF-Hodge theater), 77
 $\Theta^{\pm\text{ell}}$ Hodge 劇場 ($\Theta^{\pm\text{ell}}$ -Hodge theater), 62
 $\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF Hodge 劇場 ($\Theta^{\pm\text{ell}}$ NF-Hodge theater), 78
 Θ リンク (Θ -link), 24
- $\times\mu$ -Kummer 構造 ($\times\mu$ -Kummer structure), 18
- エタール輸送不定性 (étale-transport indeterminacy), 10
エタール θ 関数 (étale theta function), 41
エタールの (étale-like), 7
円分剛性 (cyclotomic rigidity), 43
円分剛性同型 (cyclotomic rigidity isomorphism), 5
- 円分同期化同型 (cyclotomic synchronization isomorphism), 5
円分物 (cyclotome), 4
- 外部円分物 (exterior cyclotome), 43
緩和基本群 (tempered fundamental group), 18
- 軌道曲線 (orbicurve), 31
狭義 Belyi 型 (of strictly Belyi type), 71
- コアの (coric), 14
コアのアルゴリズム (corically defined algorithm/coric algorithm), 19
コアのデータ (coric data), 19
- 実化 (realification), 67
充滿多重同型 (full poly-isomorphism), 15
上半両立性 (upper semi-compatibility), 29
初期 Θ データ (initial Θ -data), 53
- 数論的 (arithmetic), 37
- 正則 (holomorphic), 14
正則包 (holomorphic hull), 36
- 対数 Kummer 対応 (log-Kummer correspondence), 29
対数殻 (log-shell), 22
対数リンク (log-link), 26
代入切断 (evaluation section), 65
代入点 (evaluation point), 40
楕円カスプ化 (elliptic cuspidalization), 37
多重射 (poly-morphism), 15
多重同型 (poly-isomorphism), 15
多輻的アルゴリズム (multiradially defined algorithm/multiradial algorithm), 19
単解 (mono-analytic), 14
単 θ 環境 (mono-theta environment), 42
単輻的アルゴリズム (uniradially defined algorithm/uniradial algorithm), 20
- 定数倍剛性 (constant multiple rigidity), 45
定点反転自己同型 (pointed inversion automorphism), 48
- 同型物 (isomorph), 6
- 内部円分物 (interior cyclotome), 43
- 標準型 (of standard type), 40
- 輻的環境 (radial environment), 19
輻的データ (radial data), 19
フロベニオイド (Frobenioid), 7
分裂フロベニオイド (split Frobenioid), 68
- 法 N 単 θ 環境 (mod N mono-theta environment), 42
法 N θ 切断 (mod N theta section), 41
法 N モデル単 θ 環境 (mod N model mono-theta environment), 42
- 離散剛性 (discrete rigidity), 44
リンク (link), 12
- 零カスプ (zero cusp), 38