Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

バイオメカニズム学会誌, VOL. 6 , №4 (1982)

展　　望

カタストロフィーのはじまり
――その理論と応用――

久保秀雄*

I　カタストロフィーのはじまり

世の中のできごとは突発的にどう起るやらわからない。生物の行動も例にもれない。それらの底の流れの“からくり”を知りたい。突発的な変化、連続から不連続へ。若いときからの念願の一つであった。

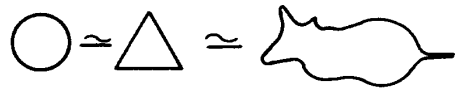
それをカタストロフィーの概念が輔けてくれないだろうか。さりとて、この理論は位相数学に基礎をおく。私は現代数学にはひとしお疎い。しかも老年、咀嚼は至難だろう。そういっても手を拱いていては念願の岸に辿りつけない。生涯一書生たるを貫きたい。敢て老躯に鞭打とう。

幸に、カタストロフィーには先達の士、とくに野口さん、本間さんらの創意溢れる解説がある。それらを杖として、導きに従って進もう。これが一老生物理学徒の動機である。

位相幾何とは：

ユークリッド的な整った図形でなくても、その図形の底流の性格、つまり図形の骨格となる線と点の結びつき方、このごろ、よくいわれる構造を追い求める。この立場を位置と形相の幾何学、約めて、位相幾何学、その後、抽象代数も加ったので、現在は位相数学（トポロジー、*topology*）というそうである。

空間を伸び縮みする理念的な弾性膜からできていると想像する。



一方から他方に移り得る（一筆がき可能）単位図形は同じ図形とみなされる。図形の内と外を区別し得る点だけに止揚する。ユークリッド幾何に対して、位相的（*topological*）同型或は位相同型（*homeomorphisme*）といっている。

カタストロフィーの誕生：

E.C.Zeeman さんの著作 *Catastrophe Theory* (1977) の序文の中で

「*René Thom* さんの思想は歴史的に１９６０年の初め頃に芽ばえた。６０年代の後期にはトムさんの著：*Stabilité Structurelle et Morphogénèse* が書かれた」

とカタストロフなる言葉の創始者 *Thom* 教授を称えておられる。

カタストロフィーの内容：

横浜市大の本間龍雄さんがその著「新しいトポロジー」の中で次のように述べていられる。

「……、高次元の空間も研究され……、取扱う図型の種類を豊富にし、……、トポロジーは現代数学の最高峰の一つとしての位置をはっきり築いた。この最高峰を征服したと思ったトポロジストたちはさらは雲間の他の峰を見出した。すなわちカタストロフィー理論の出現である。トポロジストたちは、……、彼等をしばるものは連続性だけであったが、ついに、このおきても破られる時代が来た。カタストロフィーによって人間は初めて不連続性へ挑戦する。……」と。

早稲田大学の野口宏（広）さんは「トポロジー」の中で（頁249～）次のように述べていられる。

「……、ニュートン力学におけるように科学的法則と数学的なその形式化で現象を非常に強く把えることができるならば、もちろん私たちはこうした摸型を考える必要はありません。とにかく現象が、その事柄に似ても似つかない微分方程式などで表現されてしまっても結論が正しくえられるからには、どういうわけでという質的な自然現象の幾何学的説明をこうした場合には無視するこ

＊　大阪大学名誉教授
〒560　豊中市東豊中 4−17−14
電話　06−852−3397

NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

とができます。

ところで、……、数多くの矛盾と、とても破れそうにない困難がでてくると、あるいは限りない無数の実験データに悩まされはじめると、私たちはどうしても、そうしたデータを整理し、それらのデータの中からほんとうに起っている現象はなにかを抜きだすためのなにか概念的な指針がほしくなります。……、こうした過程を質的に理解する必要がどうしてもでてくるのです。……」と。

ひと言、ひと言はカタストロフィーの神髄に迫まるもの、私は両氏の言葉に感激した。

さらに、野口さんの「カタストロフィーの理論」頁142～ で、われわれのように斯学を専門としない側に一つの警告を発していられる。「数学を専門にするものと非専門家とは区別しないといけない。数学的証明にはこだわらずに専ら使う立場に立つ方よい」と。これと似た言葉を恩師小倉金之助先生がいつも言われたことを思いだす。多分に教育的な意味が汲みとられる。

カタストロフィーなる言葉：

広辞苑（岩波）頁42、英和中辞典（小学館）頁302、仏和辞典（大修館）頁285、*Littre* 、仏々辞典P.1517、*Bloch et Wartburg* 、（仏文）語源辞典P.109 を通して、大異変 + 悲劇的結末が幅をきかせている。杉さんの新仏和辞典（白水社）には転倒、反転など、分母子の転倒などの例をあげていられる。

英和中辞典によると、ギリシャ語より *kata*（下へ）、*stroph*（*turning* 、くつがえす）とある。

これから、悲しさを抜いたカタストロフィーの内容が、すぐ後で述べる *Thom* 教授の言われる *Catastrophe* と思ってよいと思う。嬉しいカタストロフィーとあることだし。

因みに、仏では *Katastrɔf* といい、英では発音語尾が *−fi* となっている。

次にカタストロフの創始者たる *René Thom* 教授の提案（理論）を多少様子を変えてかいてみる。

II　Thom 教授のカタストロフの理論

ものごとを引き起す空間的な潜在能力（ポテンシャル）を次のように定める。

$$F = F(x,a,b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

x ：行動変数

a,b ： コントロール変数

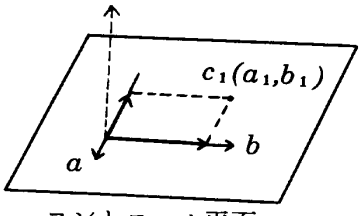
これに、極値の概念を表に出して

$$\frac{dFc}{dx} = x^3 + ax + b = 0 \quad C=(a,b)$$

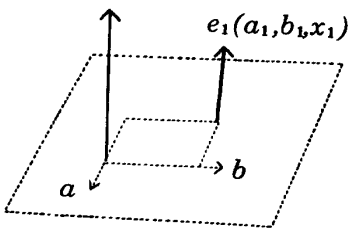
こうして、上の三次方程式を満足する曲面 M をもって、事象の図的モデルとする。

行動変数とコントロール変数：

- 車を進行させるためエンジンの始動……動力源
- ブレーキの操作……コントロール
- 古い皮質……生活源
- 新しい皮質……コントロール
- 神経系の興奮伝達……膜電位発生
- 神経への酸素圧……コントロール



コントロール平面



行動空間

上の２つの図を合わせた、所謂コントロール・行動空間であることは言うまでない。

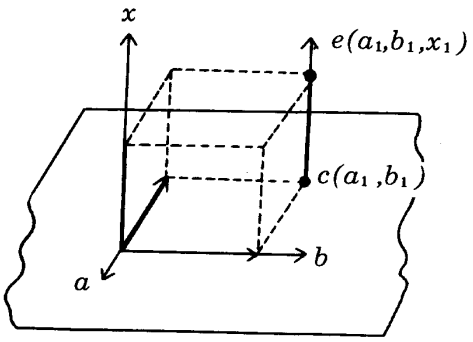
（註）野口さん、本間さんにはその風貌に接する機会に恵まれないが、成書の記するところでは、

野口さん……1925 東京都生れ　東北大学理学部卒
現在　早稲田大学理工学部教授
理博

本間さん……1926 神奈川県生れ　東京工業大学卒
現在　横浜市大文理学部教授
理博

NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)



コントロール・行動空間

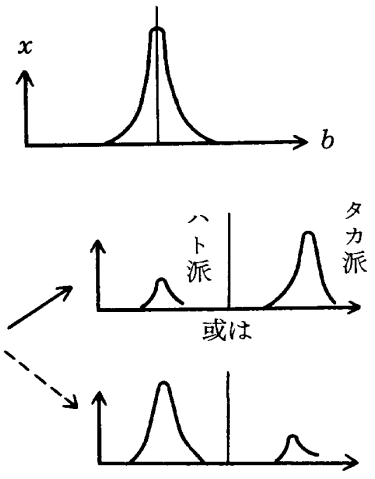
これらのコントロール変数は一般に、たとえ強弱の差があるとはいえ、ともかくも、二つ、正逆の二つに枝分れする　－分裂－

例　戦争－平和、臨調答申－米価政治加算、一死報国－君・死に給うことなかれ、生活エネルギー消費相（交感神経系）－蓄積相（副交感神経系）、……。

戦争－平和の例

a　脅威が大きくなると世論は強腰になる。

b　戦費（コスト、人とものの費用）、事が起るとタカ派とハト派に分れる。



Thom 教授のカストロフの理論は（曲面の性質から）極値の考え方を導入、基本として $dFc/dx = x^3 + ax + b = 0$ としたのであった。ここで、三次方程式を検討しなければならない。

スミルノフの邦訳、高等数学教程（I － 433頁）によると

ⅰ）三つの実根、ⅱ）一つの実根一組の共軛複素数

ⅰ）とⅱ）のどちらかを定めるため、$f(x)$ の導函数を求める（その傾斜の様相を知るためここで $dFc/dx = f(x)$ とする）、すなわち、$f'(x) = 3x^2 + a$ について、$a > 0$ 或は $a < 0$ のをしらべる。それらの得た結果を一活しておこう。

$x^2 + ax + b = 0$ の根の一活表

$a > 0$	単調増加函数　一つの実根をもつ
$a < 0$	（極大値）（極小値）$= b^2 + \frac{4}{27}a^3$
	$\begin{cases} > \text{同符号} \\ = 0 \\ < \text{異符号} \end{cases}$
$b^2 + \frac{4}{27}a^3 > 0$	実根は一つ　その中1組は共軛複素数
$b^2 + \frac{4}{27}a^3 = 0$	実根は三つ　その中、二つは等根
$b^2 + \frac{4}{27}a^3 < 0$	相異なる実根が三つ

三次方程式は *Thom* 教授の提案された基本となる方程式ひいては図形に他ならない。

ここで、極値について一言つけ加えたい。極値は言うまでもなく、極小と極大、これらを中に挟んで反曲点、各点の安定さを図示すると



極小で安定化する。安定ならばこそ事象と認定される。　当然のこと。

事象生起の条件　$\frac{dFc}{dx} = 0$　$\frac{d^2Fc}{dx^2} > 0$

不確実さの条件　〃　$\frac{d^2Fc}{dx^2} = 0$

一過性に起るかも知れないが、不安定でどちら向きやら確実な事象の起らない　〃　$\frac{d^2Fc}{dx^2} < 0$

こうして、不安定な極大から安定な極小に向って自動的に落ちこむ。

1°　ポテンシャルの変動が極小の向きに起る。

NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

2° 学科目は合理的に最もすくないように。

3° エントロピーの変動が最大の方向に。

4° 福祉は最も大きくなるように。 など。

1°と2°ではさて措き、3°では利用し得るエネルギー($\triangle G$)の変動が最小の向きに、4°でも、底辺に苦しむ家庭の数を最小にと、ともかく対立語に言い換えると(座標の正負転換)、最小(極小)なる言葉に一義的におしこめられる。

Thom さん言うところの極値は極小(最小)に帰せられると思う。—すくなくともコントロール平面では—。

このことから、*Thom* 教授の所説を回顧してみよう。

$\frac{dFc}{dx} = x^3 + ax + b = 0$ なる曲面は x,a,b の3変数できまる。点(x,a,b) の集合は曲面 M を作るから

$$M = \{(x,a,b) \mid \frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ax + b = 0\}$$

これに、極値(上に述べたわけから極小で代表させる)の条件 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$ をもつ曲面 M 中の集合を G とすると

$$G = \{(x,a,b) \mid \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0\}$$

残りの集合を△とすると

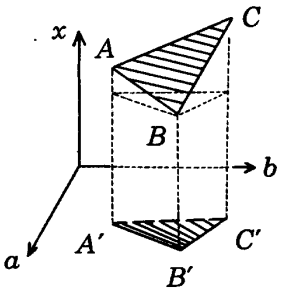
$$\triangle = \{(x,a,b) \mid \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0\}$$

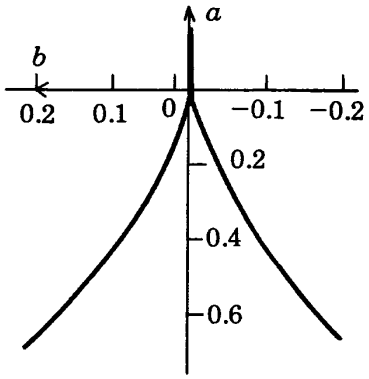
ところで $\frac{\partial F}{\partial x}$ から $x^3 + ax + b = 0$ (1)

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ から $3x^2 + a = 0$ (2)

(1)×3−(2)×x $\underline{27b^2 + 4a^3 = 0}$

結局、(1)、(2)からxを消去したことになる。即ちM 曲面からab 平面への正射影をとったことになる。これを図示すると次のようになる。

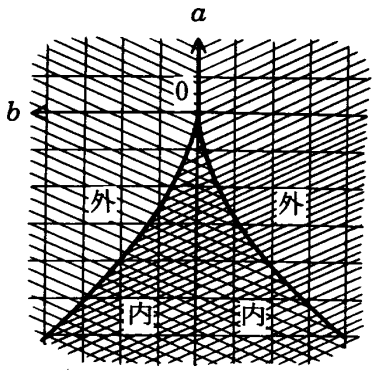




$a = 0 \sim -0.6$ とおくと

a	b
0	0
−0.2	±0.034
−0.4	±0.097
−0.6	±0.179

a が分裂して、"くさび"ができる。その内部は下の図のように、斜線が重畳している(二局所体制)、外部は一局所体制となる。

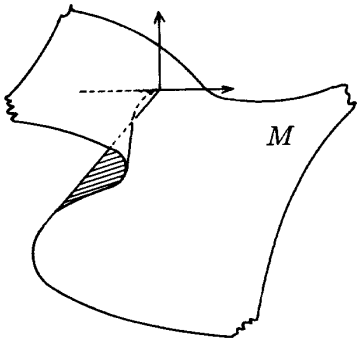


これで、*Thom* 教授のカタストロフの特質、即ち、大変革、分裂(分極)、極値の考え方、ひいて"くさび"の成りたちを一瞥したつもりである。積りといったのは、先進の記述を杖として私の把え得た範囲であるから。

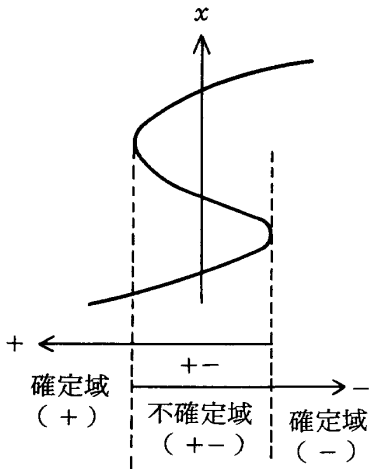
Thom 教授の M 曲面は三次方程式の根の関連から折り目もできる。その形は、たとえば

NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)



この M 曲面を行動変数 x 軸に直角前方から見ればその截り口が次のように S 字状（a,b の座標転換すると）になる。



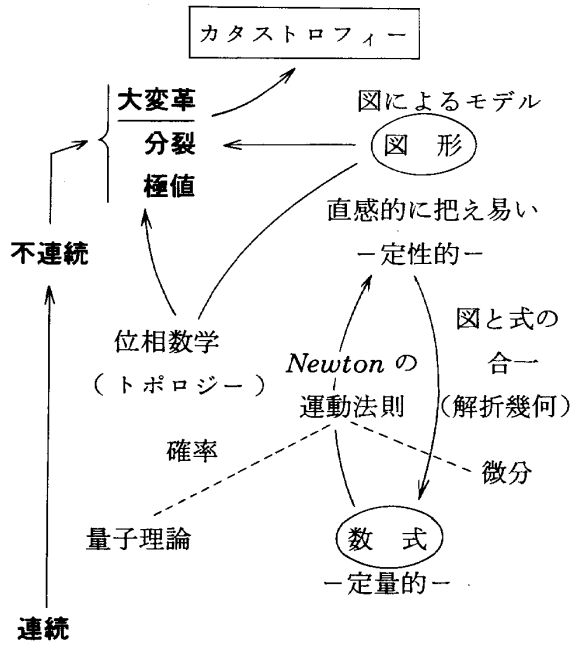
摘要　カタストロフィーの思想は極値、分裂を内蔵する大変革、そして不連続現象にタッチしようとする。位相的な図形をモデルとして、必要と思われる部分は残して、他の部分は切り捨て、グラフを見て、直感的にその奥に潜む性質を窮めようと努める。これを、一覧表にまとめると次のようになるだろう。

その後で、*Thom* さんの M 曲面を表わす図形のモデルを介して、実例をもって説明しよう。

Ⅲ　体　訓　練

自ら進んで長年体訓練を続けて来た人を P、体訓練をあまりやらなかった人を Q とする。

熟練者たる P は日本選手権に出場の予定。さらにこれに備えてはげしく練習を重ねる。「えらい」「つらい」をも、何くそとへこまず続ける根性ができている。未熟者たる Q は *PTA* の運動会に父兄として出るため、パンツ姿で練習はするもののちよっと「つらい」といってはよくサボル。こんな状況を想像してみよう。

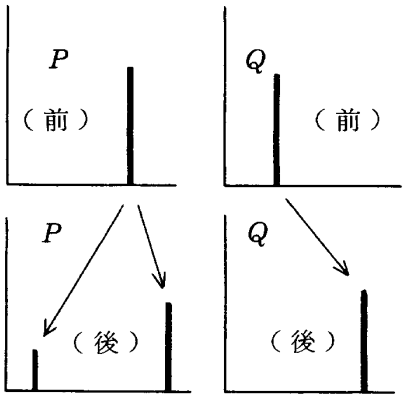


ここで、根性によって目的を達成するのを（＋）とし、根性がありあまって却って逆効果を醸すのを（−）としよう。

ところで、熟練者である P は当然（＋）と思われるのに、突発的（−）となることがよく見られる。それが、未熟者の Q に較べて、その（−）になる危険が大きい。いわゆるスポーツ障害など、これは悲しい突発事態といってよい。

ことわざによく言う。猿も木から落ちる、河童の川流れ、弘法も筆の誤り、バレー選手の白ろう症など、上手の者ほど危険が大きい。熟練者ほど分裂し易い。

熟練者 P と未熟練者 Q の分枝比較



さて何年練習を続けたかによって、これを熟練度（量）として x で表わす。この際、訓練の強さ

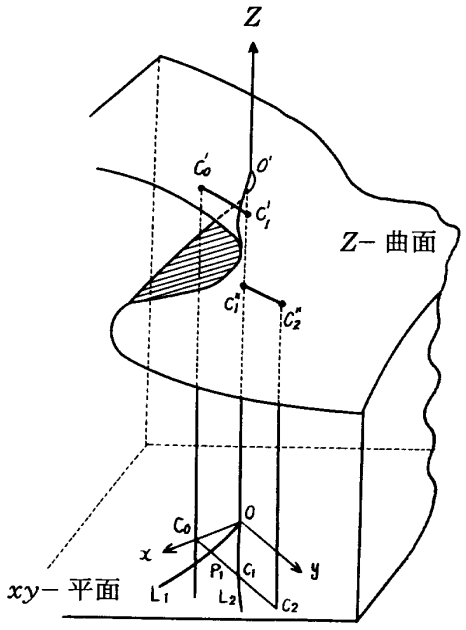
NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

を訓練度（量）yとし、その効果をzとする。点Pの集合がM曲面を作る。

Thom さんのM曲面について、野口博士の著書を道しるべとして、これから歩を運び、いささかの私見を加味して、この問題を述べよう。

次の図で、z－曲面（M曲面）の原点 0′とxy－平面の原点0とは言うまでもなく一致しているが見易くするため、（xy－平面の）0の位置を効果zの向きに下げて描いてある。xy－平面でのL_1、L_2はz－曲面の折り目のxy－平面への正射影である。



問題を熟練者（P）と未熟練者（Q）に分けて考える。

熟練者について：

熟練者である　$x>0$
強化しない　$y=0$
} その位置をC_0とする

これを強化するとC_1になる。　$C_0 \xrightarrow{\text{強化}} C_1$

強化の経路は直線P_1（xy面）を通ってC_1に至る。C_0とC_1のz－曲面の対応点はC_0',C_1'とする（前の図参照）

C_0'から訓練量が増すにつれて、C_1'に達するC_1'に達した点はもうz曲面の上側では道がないからz曲面の下側C_1''に墜落する。即ち、$C_0' \rightarrow C_1' \downarrow C_1''$. ↓は大きく、しかも急峻な変り方、こうしてカタストロフィーが出現する。

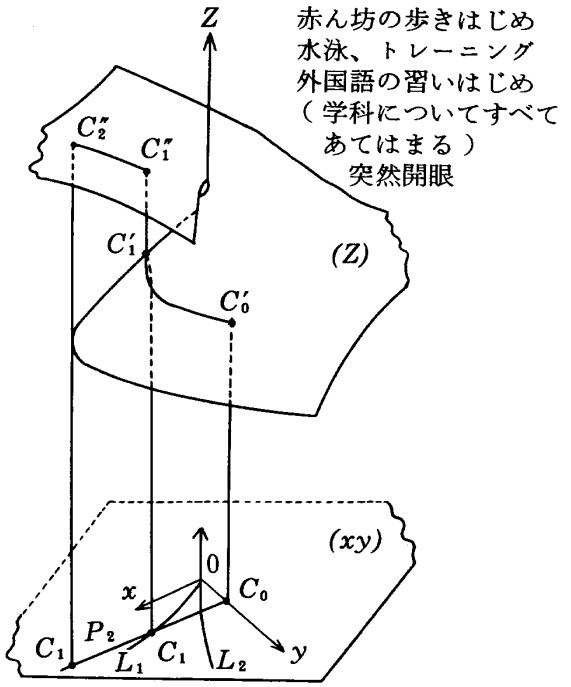
xy－面でC_0が大きいほど（熟練量xが大きいほど）直線P_1は前方の手前向きに移る。z－曲面ではC_2''はより低くなり（小さくなり）、従ってC_1'とC_1''のギャップは大きく、即ち、xy面ではくさびの幅が大きく、不確定域が長くなり、熟練者であればある程、受けるカタストロフィーが劇しいと同時に分裂の危険は大となる。

このことは熟練者Pのカタストロフィーと共に分裂の危機が増す。M曲面は良く事実に即応している。

未熟練者について：

未熟練者である　$x=0$、訓練を続けて受ける　$y=C_0$、熟練度は増す　$x>0$

この経路をxy－面でP_2で示す。



線P_2上を左方に進むと折り目L_1の点C_1に到る。点C_1に対応して、z－曲面ではC_1'が得られている。

C_1をさらに進もうとしても、z－曲面の折り目C_1'では断崖に臨むから、C_1''にジャンプしなければならない。z－曲面上の全行程は$C_0' \rightarrow C_1' \uparrow C_1''$となる。訓練量$y$が増すに従って効果は向上するが、なお、遅々として、あぶなっかしい。いったん、折り目のC_1'に達すると、突然飛躍してC_1''に至る。即ち、未熟者にとって、初め苦しいが向上すると、後はらくらく進む。

赤ん坊の歩きはじめ、ヨチヨチしているが、い

NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

つのまにやらスラスラ歩く。このことは水泳、一般にトレーニング、外国語の習い始め、その他の学科について当てはまるだろう—突然開眼—。

Ⅳ 創造と技巧

半世紀の前のことであるが、ミレーの旧跡を訪れた。晩鐘や落葉拾いにあるような静かな環境、ミレーは心ゆくまで自然の描写を楽しんだことだろう。人の真似でなく、ミレーならではという世界を創造した。

ミレーの部屋はがらんとして、家具はただ木製の机と寝台との二つ、だが、棚の上にはデッサン用の石膏細工がギッシリつまっている。

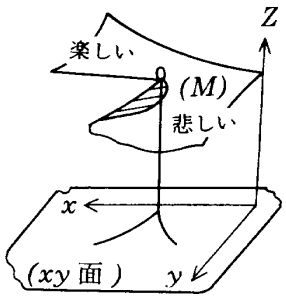
貧苦に耐えながら、腕を磨くため、デッサンに明け暮れした。その苦難によく耐えて、技巧の上達への焔はあの静かな絵をもたらした。素直な画風への創造が産れた。絵心の乏しい私にも、この訓えがその後、大きな指針となった。留守番の老婦人の言葉に感銘をうけた。

数学でも、あれこれ試みて問題が解けたときはうれしい。ただ、機械的に計算だけやらされたらウンザリする。計算技術はもとより知らねばならない。しかし、独創を加える余地がなければ楽しくなく、むしろ苦痛でさえあるだろう。

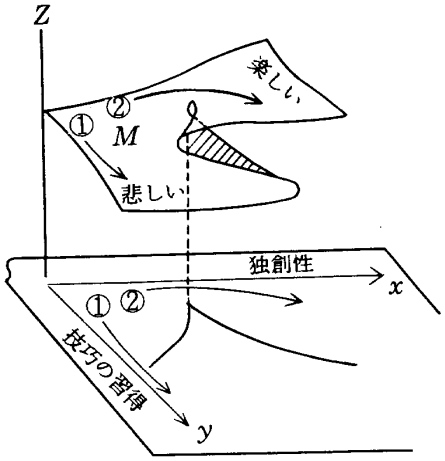
身を切られる思いで精進する（技巧）→苦しい
＋
得た技巧を自由に操って（独創）→楽しい

バッティングの基本にはげしくぶつかる→肉体的に苦痛
＋
一本足打法→楽しい

技巧の上達に際して、創造の加わるか、加わらないかによって、楽しいか苦しいかの二つに分極する—分裂— こうして、技巧の上達は分裂要因となる。



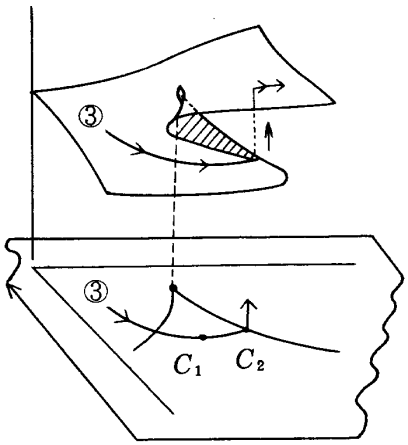
x 軸について対称（正負逆転）にとるならば



（カタストロフィーの理論　頁27）

すぐ前の図で、xy− 面で①の道をとれば、M 曲面（z − 面）で対応する①の道をとる。悲しい領域にはいりこみ、悲しいことになるだろう。②の道をとれば楽しい分野に赴く。ただし、この際では苦労抜きでは身につかないだろう。①と②はカタストロフィーには縁なし。それは“くさび”を通らないから。

次の図で③の道をとる場合を考えてみよう。



NII-Electronic Library Service

Society of Biomechanisms Japan (SOBIM)

③の道をとると、練習の苦しみが強いが、"くさび"を通りすぎると、もう、かなしさが増して耐えられなくなる。図のC_1ぐらいで練習に棒を折って転向してしまうだろう。しかし、辛抱してその峠を越すとC_2に達する。こうして"くさび"の領域を脱出する。とたんに、z－曲面で、上の領域に飛び上り、カタストロフィーがここで起りあとは楽しい境地にはいりこむ。

あ と が き

Thom 教授による*catastrophe* なる術語の「始まり」について私なりに述べてきた。

東京都立大学の岡部恒次さんの説かれているところは(数理科学 8,'73,13)今後の *catastrophe* の行くえを示唆するものとして私は感銘をうけた。「……、この理論は現象を大雑把につかんで、その解析化を進める方法である。しかし、いままでの数学の精密さに比べると、まだ荒っぽさが目立つが、それだけに、強力な面や、魅力のある面をもっている。だから絶対視することなく、注意深く用いてゆくと、きわめて有効な武器となるだろう」と。岡部さんは遡って、英の数学者*Zeeman* さんのカタストロフィー・マシンのゴム紐のポテンシャル計算と実際上の突発的に変位が起るとの示教を見られて、*Thom* 教授の提案モデルのM曲面がもうすこし、公理の方向に近づくべきで、*Zeeman* 教授のいわれる楕円(との縮閉線と)から成るようなモデルの方向に突発事象を備えるべきであろうと指摘されている。その後、多くの斯学徒が努めておられるようである。たとえば、*Duffing* の方程式の利用

$$\underset{\text{I}}{\ddot{x}}+\underset{\text{II}}{x}+\underset{\text{III}}{\varepsilon k\dot{x}}+\underset{\text{IV}}{\varepsilon x^2}=F\cos\Omega t$$

もその一つであろう。I：単純調和振動子、II：減衰項、III：小さな*Duffing* 項、IV：外力項、$\Omega=1+\varepsilon\omega$、$\omega$、$F$は外部から調整ができるパラメータ(*Duffing* の方程式の解は、たとえば、近藤次郎さんの応用数学)そうして、$4\varepsilon\omega^3=27F^2$ を誘導されている。つまり、摂動項によって、不安定から安定域に転じ得るという。

ともかく、本論で述べたように、*catastrophe* の基盤が築かれた。今後どう発展するのか。生理学の領域で、神経興奮伝達、ひいては脳のからくりの様相、長い短い記憶の現われへと一路邁進しておられる。(私も生理畑から一臂の力添えをしたい)ともかくも、それらの方々の"とりいれ"がまもなく達せられるであろう。

終りに、*catastrophe* の創始者*Thom* 教授並びにその開拓者たる*Zeeman* 教授の卓見はさらなり、本邦における先達、とくに、野口さん、本間さん、後に述べた岡部さんの訳業、著作のお世話になった。そのときに書きとめた私のノートが本稿の素材になった。とくに章末の2編は各図を含めて、先進のアイディアや書式に法って、自己流に添枝接葉したのに過ぎない。折角の珠玉を害わないかと案じている。ここに三尺下ってお礼を申しあげたい。

さらに、本稿を奨めて下さった浅明高明教授(筑波大学)、図表の調整に努めて下さった長井音次さん(和医大名誉教授、現大阪女子学園短大教授)に謝意を表したい。　　(1982, 8, 5)

NII-Electronic Library Service